

LYCEE MILITAIRE D'AUTUN

MPSI , ANNEE SCOLAIRE 2003-2004

CHAPITRE 5 : **COURBES**

PLAN DU COURS

I) Courbes paramétrées planes

- 1) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$
- 2) Tangente en un point d'une courbe paramétrée
- 3) Branches infinies d'une courbe paramétrée
- 4) Etude pratique d'une courbe paramétrée

II) Courbes définies par une représentation polaire

- 1) Généralités
- 2) Etude pratique d'une courbe définie par une équation polaire

Fiche d'exercices sur les **Courbes**

CHAPITRE 5

PREMIERE PERIODE

COURBES

I) Courbes paramétrées planes

1) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

d_1 : Une fonction vectorielle est une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto f(t) = (x(t), y(t))$, les fonctions x et y sont les fonctions coordonnées de l'application f .

Rappel

Soit $l = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\|l\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

d_2 : Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle et $t_0 \in I$.

On dit que f admet une limite en t_0 lorsqu'il existe $l \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - l\| = 0$.

Notation : $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$.

p_1 : Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle, $t_0 \in I$ et $l = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$.

Preuve

($\Rightarrow$) On suppose que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$.

$$0 \leq |x(t) - a| \leq \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} = \|f(t) - l\| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |x(t) - a| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a.$$

$$0 \leq |y(t) - b| \leq \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} = \|f(t) - l\| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |y(t) - b| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b.$$

($\Leftarrow$) On suppose que $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$.

$$0 \leq \|f(t) - l\| = \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} \leq |x(t) - a| + |y(t) - b| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - l\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l.$$

Exemple

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Soit $f: t \mapsto (e^{-t}, \frac{e^t}{t^2 + 1})$, on a : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = (1, 1)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (0, +\infty)$.

d_3 : Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle et $t_0 \in I$.

On dit que f est continue en t_0 lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en chaque t_0 de I .

p_2 : Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle et $t_0 \in I$.

La fonction f est continue en t_0 si et seulement si les fonctions coordonnées x et y sont continues en t_0 .

Preuve

Il suffit d'utiliser p_1 .

d_4 : Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle et $t_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en t_0 lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe et dans ce cas, on note $f'(t_0)$ cette limite.

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en chaque t_0 de I .

p_3 : Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle et $t_0 \in I$.

La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions coordonnées x et y sont dérivables en t_0 et dans ce cas, $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Preuve

Il suffit d'utiliser p_1 .

d_5 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est indéfiniment dérivable sur I , ce qui est équivalent à ce que les fonctions coordonnées le soient.

Exemple

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

la fonction vectorielle f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, f^{(n)}(t) = (\cos^{(n)}(t), \sin^{(n)}(t)) = (\cos(t + \frac{n\pi}{2}), \sin(t + \frac{n\pi}{2})).$$

p_4 : Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonctions vectorielles dérivables sur I , alors on a :

i) La fonction $f \cdot g$ est dérivable sur I et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

ii) Si $f \neq \vec{0}$ sur I , la fonction $\|f\|$ est dérivable sur I et $\|f\|' = \frac{f' \cdot f}{\|f\|}$.

iii) La fonction $\det(f, g)$ est dérivable sur I et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

Preuve

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$.

i) $f \cdot g: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)$.

La fonction $f \cdot g$ est dérivable sur I .

$$(f \cdot g)' = (x_1x_2 + y_1y_2)' = x_1'x_2 + x_1x_2' + y_1'y_2 + y_1y_2' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

ii) $\|f\| = \sqrt{f \cdot f} \Rightarrow \|f\|' = \frac{(f \cdot f)'}{2\sqrt{f \cdot f}} = \frac{f' \cdot f + f \cdot f'}{2\sqrt{f \cdot f}} = \frac{f' \cdot f}{\|f\|}$.

iii) $\det(f, g): I \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$.

La fonction $\det(f, g)$ est dérivable sur I .

$$(\det(f, g))' = (x_1y_2 - x_2y_1)' = x_1'y_2 + x_1y_2' - x_2'y_1 - x_2y_1' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

d_6 : Une courbe paramétrée est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OM} = f(t)$ où $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (x(t), y(t))$
 est une fonction vectorielle.

On dit aussi que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la courbe.

$M(x(t), y(t))$ est le point de la courbe correspondant au paramètre t .

Exemples

- $\begin{cases} x = x_0 + rt \\ y = y_0 + st \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_0, y_0)$ ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(r, s)$.
- $\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$ est une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ de rayon R .
- Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0, \pi/2] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \\ t \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{sont deux représentations paramétriques de la courbe } \mathcal{C}.$$

2) Tangente en un point d'une courbe paramétrée

Pour tout le paragraphe, $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

On considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$.

Soit $t \in I$, $M(t)$ est le point de la courbe correspondant au paramètre t .

On identifie le vecteur $\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ à $f(t)$.

d₇ : Soit $t \in I$.

Le vecteur $\vec{V}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ est appelé vecteur vitesse au point $M(t)$ à la courbe $\mathcal{C}$.

Le vecteur $\vec{A}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$ est appelé vecteur accélération au point $M(t)$ à la courbe $\mathcal{C}$.

Remarques

- Interprétation cinématique.

Un mouvement ponctuel est une courbe $\mathcal{C}$ ayant une représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$.

Le paramètre t désigne le temps.

Le mouvement ponctuel est dit :

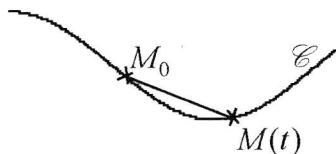
- uniforme lorsque : $\forall t \in I, \|\vec{V}(t)\| = k$,
- rectiligne lorsque : $\forall t \in I, M(t) \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est une droite un plan,
- à accélération centrale lorsque : $\exists A \in \mathcal{P} / \forall t \in I, \overrightarrow{AM(t)}$ et $\vec{A}(t)$ colinéaires.

- On a les relations : $\forall t \in I, \vec{V}(t) = f'(t)$ et $\vec{A}(t) = f''(t)$.

d₈ : Soit $t \in I$, on dit que le point $M(t)$ est régulier lorsque $\vec{V}(t) \neq \vec{0}$ et dans le cas où $\vec{V}(t) = \vec{0}$, on dit que le point $M(t)$ est singulier.

d₉ : Soit $t_0 \in I$, on note $M_0 = M(t_0)$.

La tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$ est la position limite de la droite $(M_0M(t))$ lorsque t tend vers t_0 .



Th₁ : Soit $t_0 \in I$, on note toujours $M_0 = M(t_0)$.

Si le point M_0 est un point régulier, c'est-à-dire $\vec{V}(t_0) \neq \vec{0}$, alors $\vec{V}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.

Démonstration

$$\vec{V}(t_0) = f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{OM(t)} - \overrightarrow{OM_0}}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{t - t_0}.$$

$\frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{M_0M(t)}$ est un vecteur directeur de la droite $(M_0M(t))$, par passage à la limite lorsque t tend vers t_0 ,

on en déduit que $\vec{V}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.

Exemple

Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Détermination de la tangente au point $M(t_0)$ à la courbe $\mathcal{C}$ lorsque $t_0 \in \{1, 0\}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \vec{V}(t) = (3t^2, 2t), \vec{V}(1) = (3, 2) \text{ et } \vec{V}(0) = (0, 0) = \vec{0}.$$

$M(1) = (1, 1)$ est un point régulier, $\vec{V}(1)$ est un vecteur directeur de la tangente au point $M(1)$ à la courbe $\mathcal{C}$.

$M(0) = (0, 0)$ est un point singulier car $\vec{V}(0) = \vec{0}$.

Remarque

On admet la relation suivante qui sera démontrée dans la chapitre sur les développements limités :

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}f''(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}f^{(3)}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}f^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \text{ où } \varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ vérifie la relation } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = \vec{0}.$$

On a encore :

$$M(t) = M(t_0) + (t-t_0)\vec{V}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\vec{A}(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}f^{(3)}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}f^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t).$$

Th₂ : Soit $t_0 \in I$, on note toujours $M_0 = M(t_0)$.

Soit p le plus petit entier strictement positif tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$, alors $\vec{W}(t_0) = f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.

Démonstration

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}f''(t_0) + \dots + \underbrace{\frac{(t-t_0)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(t_0)}_{=\vec{0}} + \frac{(t-t_0)^p}{p!}f^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow M(t) = M_0 + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{W}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0 M(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\vec{W}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \vec{W}(t_0) + p! \varepsilon(t) = \frac{p!}{(t-t_0)^p} \overrightarrow{M_0 M(t)}$$

$$\Rightarrow \vec{W}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{p!}{(t-t_0)^p} \overrightarrow{M_0 M(t)}.$$

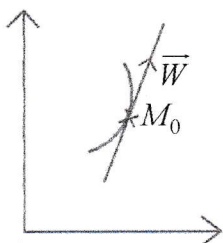
Puisque $\overrightarrow{M_0 M(t)}$ est un vecteur directeur de la droite $(M_0 M(t))$, le vecteur $\frac{p!}{(t-t_0)^p} \overrightarrow{M_0 M(t)}$ est aussi un vecteur directeur de la droite $(M_0 M(t))$, puis il suffit de faire un passage à la limite lorsque t tend vers t_0 .

Remarque

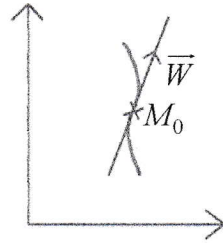
La plupart du temps $p=1$, c'est-à-dire , le point $M_0 = M(t_0)$ est régulier .

d₁₀ : Soit $t_0 \in I$, on note toujours $M_0 = M(t_0)$ et $\vec{W}$ un vecteur directeur de la tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$, $\vec{W} = \vec{V}(t_0)$ si $\vec{V}(t_0) \neq \vec{0}$.

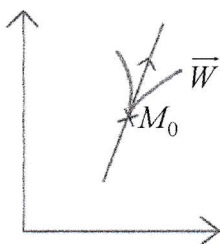
On a quatre possibilités pour la courbe au voisinage de t_0 :



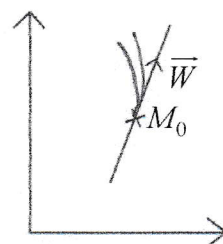
Point ordinaire



Point d'inflexion



Point de rebroussement de première espèce



Point de rebroussement de deuxième espèce

Th₃ : Soit $t_0 \in I$, on note toujours $M_0 = M(t_0)$.

Soit p le plus petit entier strictement positif tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$, $\vec{W} = f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.

Soit q le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $f^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\vec{W}$.

On note $\vec{R} = f^{(q)}(t_0)$.

Alors on a :

si $p=1$ et $q=2$ alors M_0 est un point ordinaire (c'est le cas le plus fréquent) ,

si $p=1$ et $q=3$ alors M_0 est un point d'inflexion ,

si $p=2$ et $q=3$ alors M_0 est un point de rebroussement de première espèce ,

si $p=2$ et $q=4$ alors M_0 est un point de rebroussement de deuxième espèce (ce cas n'est pas fréquent) .

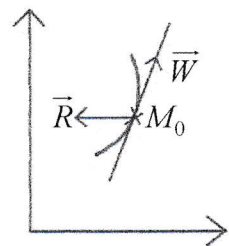
Démonstration

Puisque $\vec{W}$ et $\vec{R}$ ne sont pas colinéaires , $\{\vec{W}, \vec{R}\}$ est une base du plan .

$$M(t) = M(t_0) + (t-t_0)\vec{V}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\vec{A}(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!}f^{(3)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^4}{4!}f^{(4)}(t_0) + (t-t_0)^4\varepsilon(t) .$$

On suppose que $p=1$ et $q=2$:

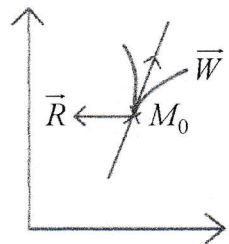
On a $\vec{W} = \vec{V}(t_0)$, $\vec{R} = \vec{A}(t_0)$.



M_0 est un point ordinaire .

On suppose que $p=2$ et $q=3$:

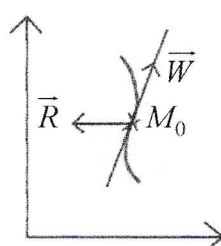
On a $\vec{W} = \vec{A}(t_0)$ et $\vec{R} = f^{(3)}(t_0)$.



M_0 est un point de rebroussement de première espèce .

On suppose que $p=1$ et $q=3$:

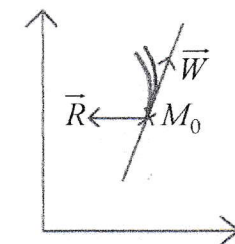
On a $\vec{W} = \vec{V}(t_0)$ et $\vec{R} = f^{(3)}(t_0)$.



M_0 est un point d'inflexion .

On suppose que $p=2$ et $q=4$:

On a $\vec{W} = \vec{A}(t_0)$ et $\vec{R} = f^{(4)}(t_0)$.



M_0 est un point de rebroussement de deuxième espèce .

Exemple

Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Tangente et position de la tangente au point $M(t_0)$ à la courbe $\mathcal{C}$ lorsque $t_0 = 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\vec{V}(t) = (3t^2, 2t)$, $\vec{V}(0) = (0,0) = \vec{0}$ donc $M(0) = (0,0)$ est un point singulier .

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\vec{A}(t) = (6t, 2)$, $\vec{A}(0) = (0,2) \neq \vec{0}$ donc $p=2$.

La tangente au point $M(0)$ à la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $M(0) = (0,0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{j}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(t) = (6,0)$, $f^{(3)}(0) = (6,0)$ est non colinéaire à $\vec{A}(0)$ donc $q=3$.

$M(0) = (0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce .

3) Branches infinies d'une courbe paramétrée

Pour tout le paragraphe, $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

On considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$.

d_{11} : Soit $\mathcal{C}$ une courbe (non nécessairement paramétrique).

- i) La courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote lorsque la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche de l'asymptote.
- ii) La courbe $\mathcal{C}$ possède une branche parabolique lorsque la courbe $\mathcal{C}$ prend la direction de la branche parabolique.

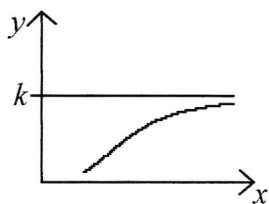
d_{12} : On dit que la courbe $\mathcal{C}$ possède une branche infinie lorsqu'il existe $t_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty \text{ ou } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty.$$

On a diverses possibilités pour la branche infinie.

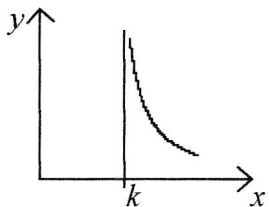
$$1^{ier} \text{ cas : } \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = k.$$

La courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = k$.



$$2^{ieme} \text{ cas : } \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = k \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty.$$

La courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote verticale d'équation $x = k$.

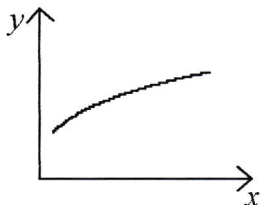


$$3^{ieme} \text{ cas : } \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty.$$

Il faut évaluer $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ et on a trois possibilités.

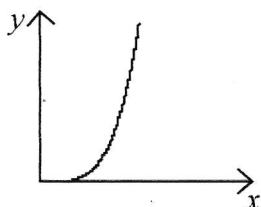
$$\bullet 1^{iere} \text{ possibilité : } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0.$$

La courbe $\mathcal{C}$ possède une branche parabolique horizontale.



$$\bullet 2^{ieme} \text{ possibilité : } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty.$$

La courbe $\mathcal{C}$ possède une branche parabolique verticale.

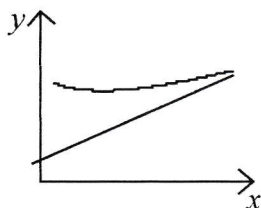


- 3^{ème} possibilité : $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a, a \neq 0$.

Il faut évaluer $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)]$.

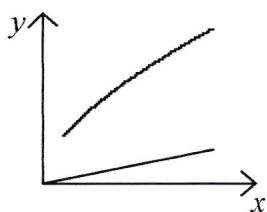
Si on a $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b$ alors

la courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.



Si on a $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = \infty$ alors

la courbe $\mathcal{C}$ possède une branche parabolique oblique d'équation $y = ax$.



4) Etude pratique d'une courbe paramétrée

Etude complète de la courbe paramétrée $\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases}$.

- Etude des fonctions x et y

$$\forall t > -2, x'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2+t} = \frac{-t^2 + 2+t}{t^2(2+t)} = \frac{(t+1)(t-2)}{t^2(2+t)} \text{ et } \forall t > 0, y' = -\frac{1}{t^2} + 1 = \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}.$$

t	-2	-1	0	2	$+\infty$	
x'	+	0	-	-	0	+
x	$-\infty$	-1	$+\infty$	$1/2 + \ln 4$	$+\infty$	

t	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	2	$+\infty$

t	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
x	$-\infty$	-1	$+\infty$	$1/2 + \ln 4$	$+\infty$	
y	$-5/2$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

- Etudes spécifiques

$$M(1) = (1 + \ln 3, 2), \vec{V}(1) = (x'(1), y'(1)) = (-\frac{2}{3}, 0) \neq \vec{0} \text{ donc } p = 1.$$

$M(1)$ est un point régulier, tangente horizontale en ce point.

$$M(2) = (1/2 + \ln 4, 5/2), \vec{V}(2) = (x'(2), y'(2)) = (0, \frac{3}{4}) \neq \vec{0} \text{ donc } p = 1.$$

$M(2)$ est un point régulier, tangente verticale en ce point.

$$M(-1) = (-1, -2), \vec{V}(-1) = (x'(-1), y'(-1)) = (0, 0) = \vec{0} \text{ donc } M(-1) \text{ est un point singulier.}$$

$$\vec{A}(-1) = (-3, -2) \text{ donc } p = 2 \text{ et } f'''(-1) = (-4, -6) \text{ donc } q = 3.$$

On en déduit que $M(-1)$ est un point de rebroussement de première espèce.

- Etude des branches infinies

Il faut faire une étude pour $t \in \{-2^+, 0^-, 0^+, +\infty\}$.

$\lim_{t \rightarrow -2^+} x(t) = -\infty$ et $y(-2) = -5/2$: asymptote horizontale d'équation $y = -5/2$.

$\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = -\infty$, il faut évaluer $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)}{x(t)}$.

$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2 + 1}{1 + t \ln(2+t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} 1$, il faut évaluer $\lim_{t \rightarrow 0^-} [y(t) - x(t)]$.

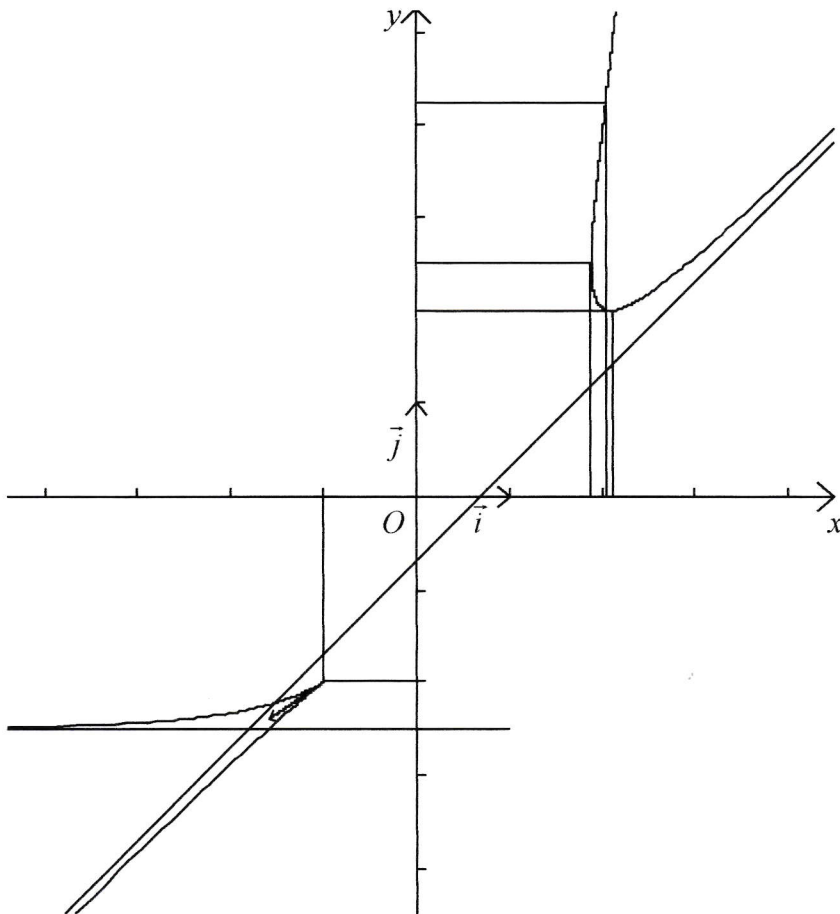
$y(t) - x(t) = t - \ln(2+t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} -\ln 2$: asymptote oblique d'équation $y = x - \ln 2$ lorsque t tend vers 0^- .

De même, asymptote oblique d'équation $y = x - \ln 2$ lorsque t tend vers 0^+ .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$, il faut évaluer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$.

$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2 + 1}{1 + t \ln(2+t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$: branche parabolique verticale lorsque t tend vers $+\infty$.

- Représentation graphique



- Remarques

Cette courbe ne possède pas de point double ($M(t_1) = M(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$).

Cette courbe possède un point d'inflexion.

Si $M(t)$ est un point d'inflexion, nécessairement $\det(\vec{V}(t), \vec{A}(t)) = 0$.

$$\det(\vec{V}(t), \vec{A}(t)) = \frac{(t+1)^2(t-4)}{t^3(2+t)^2}.$$

$M(-1)$ est un point de rebroussement de première espèce donc $M(4) = (1/4 + \ln 6, 4 + 1/4)$ est l'unique point d'inflexion de cette courbe.

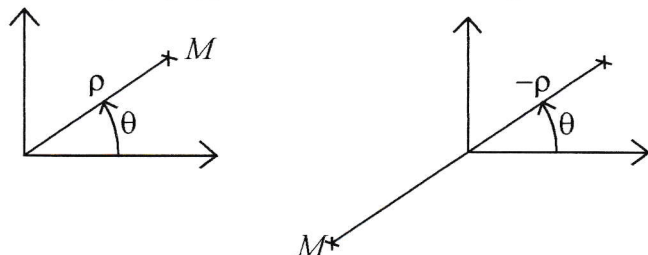
II) Courbes définies par une représentation polaire

1) Généralités

$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est le repère canonique du plan.

d₁ : Soit $(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2$, on définit le point $M(\theta, \rho)$ par $\overrightarrow{OM} = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j}$.

On dit que (θ, ρ) sont les coordonnées polaires du point M .



Remarques

- Pour ce paragraphe, le rayon ρ peut être négatif.
- Soit le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j}$.
 (θ, ρ) sont les coordonnées polaires du point M .
 $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ sont les coordonnées cartésiennes du point M .
- Soit le point M de coordonnées polaires (θ, ρ) .

On a $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$ où le vecteur $\vec{u}$ est défini par $\|\vec{u}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{u}) = \theta$, c'est-à-dire $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$.

- $M(\theta, \rho) = M(\pi + \theta, -\rho)$.

d₁ : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \\ \theta \in I \end{cases}$$

$(\theta, f(\theta))$ sont les coordonnées polaires du point M de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant au paramètre θ .

On dit que $\rho = f(\theta)$ est la représentation polaire de la courbe $\mathcal{C}$.

On a la relation : $\forall \theta \in I, \overrightarrow{OM} = f(\theta) \vec{u}$.

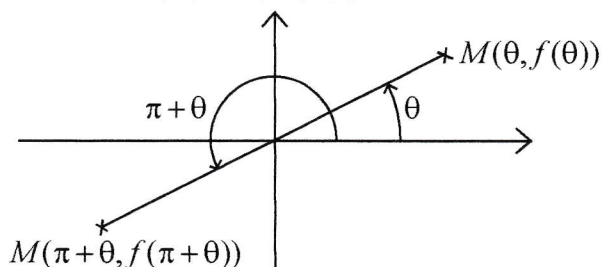
Exemple

Soit la courbe $\mathcal{C}$ définie par la représentation polaire $\rho = \theta$ avec $\theta \in [0, +\infty[$ (dans ce cas $f(\theta) = \theta$).
 la courbe $\mathcal{C}$ est une spirale.

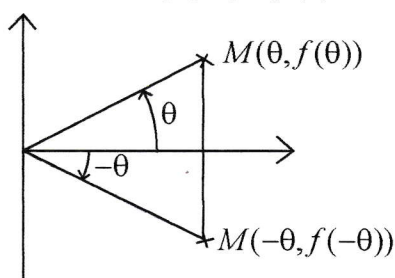
Remarques

Soit la courbe $\mathcal{C}$ définie par la représentation polaire $\rho = f(\theta)$, $\mathcal{C} = \{M(\theta, f(\theta)), \theta \in I\}$.

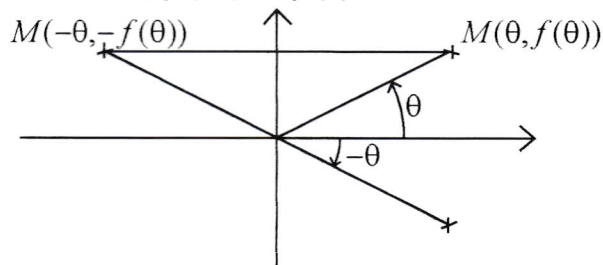
- Si $\forall \theta \in I, f(\pi + \theta) = f(\theta)$ alors la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine.



- Si $\forall \theta \in I, f(-\theta) = f(\theta)$ alors la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox).



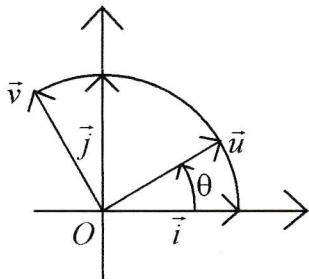
- Si $\forall \theta \in I$, $f(-\theta) = -f(\theta)$ alors la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .



Rappel

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, On définit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par : $\vec{u} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$.

On a donc : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, $(\vec{i}, \vec{u}) = \theta$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.



d₃ : Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$.

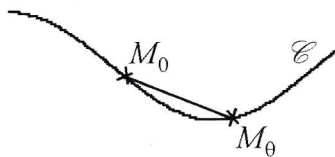
On a la relation : $\forall \theta \in I$, $\overrightarrow{OM} = f(\theta)\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{V}(\theta) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) = f'(\theta)\vec{u} + f(\theta)\vec{v}$ est appelé vecteur vitesse au point $M(\theta, f(\theta))$ à la courbe $\mathcal{C}$.

Le vecteur $\vec{A}(\theta) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}(\theta) = (f''(\theta) - f(\theta))\vec{u} + 2f'(\theta)\vec{v}$ est appelé vecteur accélération au point $M(\theta, f(\theta))$ à la courbe $\mathcal{C}$.

d₄ : Soit $(\theta_0, \theta) \in I^2$, on note $M_0 = M(\theta_0, f(\theta_0))$ et $M_\theta = M(\theta, f(\theta))$.

La tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$ est la position limitée de la droite (M_0M_θ) lorsque θ tend vers θ_0 .



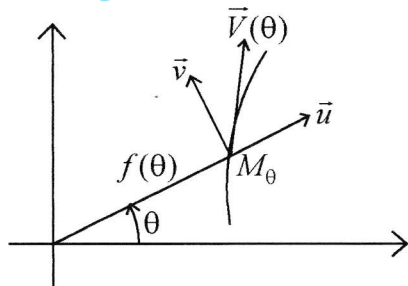
p₁ : Soit $\theta_0 \in I$, on note toujours $M_0 = M(\theta_0, f(\theta_0))$.

Si $\vec{V}(\theta_0) = f'(\theta_0)\vec{u} + f(\theta_0)\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{V}(\theta_0)$ est un vecteur directeur de la tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.

Preuve

$\vec{V}(\theta) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta_0) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\overrightarrow{OM_\theta} - \overrightarrow{OM_0}}{\theta - \theta_0} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\overrightarrow{M_0M_\theta}}{\theta - \theta_0}$ puis il suffit de remarquer que $\frac{1}{\theta - \theta_0} \overrightarrow{M_0M_\theta}$ est un vecteur directeur de la droite (M_0M_θ) .

Remarque



Le vecteur $\vec{V}(\theta)$ a pour coordonnées $(f'(\theta), f(\theta))$ par rapport à la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

2) Etude pratique d'une courbe définie par une équation polaire

Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ (dans ce cas $f(\theta) = 1 + \cos\theta$).

- Domaine d'étude et signe de la fonction f

Puisque la fonction f est 2π périodique, on obtient toute la courbe sur un intervalle de longueur 2π .

La fonction f est paire donc étude sur $[0, \pi]$ puis symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

$\forall \theta \in [0, \pi]$, $f'(\theta) = -\sin\theta$.

θ	0	π
ρ'		-
ρ	2	0

- Quelques points avec leurs tangentes

Lorsque l'on écrit $M(\theta, f(\theta))$, $(\theta, f(\theta))$ sont les coordonnées polaires du point M .

On rappelle les relations : $\forall \theta \in [0, \pi]$, $\vec{V}(\theta) = f'(\theta)\vec{u} + f(\theta)\vec{v}$ et $\vec{A}(\theta) = (f''(\theta) - f(\theta))\vec{u} + 2f'(\theta)\vec{v}$.

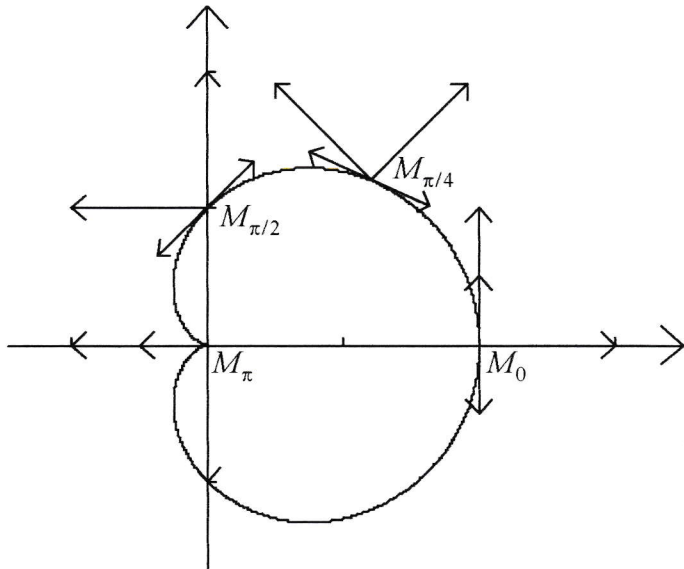
Pour $\theta = 0$, $M(0, 2)$, $\vec{V}(0) = f'(0)\vec{u} + f(0)\vec{v} = 2\vec{v}$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $M(\frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{V}(\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{\pi}{4})\vec{u} + f(\frac{\pi}{4})\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\vec{v}$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $M(\frac{\pi}{2}, 1)$, $\vec{V}(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})\vec{u} + f(\frac{\pi}{2})\vec{v} = -\vec{u} + \vec{v}$.

Pour $\theta = \pi$, $M(\pi, 0)$, $\vec{V}(\pi) = f'(\pi)\vec{u} + f(\pi)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{A}(\pi) = (f''(\pi) - f(\pi))\vec{u} + 2f'(\pi)\vec{v} = \vec{u}$.

- Représentation graphique



La courbe $\mathcal{C}$ est une cardioïde.

LYCEE MILITAIRE D'AUTUN

MPSI , ANNEE SCOLAIRE 2003-2004

CHAPITRE 5 : COURBES

Fiche d'exercices sur les COURBES

- 1) Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Montrer que la courbe définie par la fonction f ne possède pas de point de rebroussement.

- 2) Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}.$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ possède un point double.

Déterminer les deux tangentes au point double de la courbe $\mathcal{C}$.

- 3) Etudier et tracer les courbes paramétrées définies par :

a)
$$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 2t^2 - t^4 \end{cases}.$$

b)
$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \text{ (cycloïde) }.$$

c)
$$\begin{cases} x = t^2 + \frac{2}{t} \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}.$$

- 4) **Astroïde**

Soit la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

- a) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$.

- b) Pour tout point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}$ non situé sur l'un des deux axes de coordonnées, on considère $P(t)$ et $Q(t)$, points d'intersection de la tangente au point $M(t)$ à la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes (Ox) et (Oy) .

Montrer que $\|\overrightarrow{P(t)Q(t)}\|$ est une constante que l'on déterminera.

- 5) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$.

- 6) **Lemniscate de Bernoulli**

On considère les points $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$.

Déterminer une équation polaire de l'ensemble des points M du plan tels que $MF \cdot MF' = 1$.

Etudier et tracer cette courbe.