

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel impair.

On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} z^k + z^n = 0$$

1°) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que : z solution de $(E) \iff (1 - z^n)(1 + z) = 0$.

2°) En déduire les solutions de (E) . Combien y en a-t-il ?

3°) Soit $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2p\pi / p \in \mathbb{Z}\}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(*)$: $\frac{1+iu}{1-iu} = e^{i\varphi}$ d'inconnue u .

On exprimera la réponse en fonction de φ et $\tan$.

4°) Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') d'inconnue u :

$$(E') : 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^k + \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right)^n = 0$$

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

On note

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z(1-z) \end{aligned}$$

On identifiera dans l'exercice un point du plan et son affixe z .

1°) Déterminer les antécédents de -2 .

Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

2°) Soit z_1 et z_2 deux complexes distincts.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que $f(z_1) = f(z_2)$.

En donner une interprétation géométrique.

3°) Justifier que f est surjective.

Y a-t-il des complexes admettant un seul antécédent par f ? Si oui, le(s)quel(s) ?

4°) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

5°) a) Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right)$.

b) En déduire que $f(\Gamma) = \Gamma'$ où Γ est le cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon 1 et Γ' est un cercle que l'on caractérisera.

Exercice 2

1°) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} z^k - 2z^0 + z^n = 0 \\
 &\iff -1 + 2 \frac{1 - z^n}{1 - z} + z^n = 0 \quad \text{car } z \neq 1 \\
 &\iff -1 + z + 2 - 2z^n + z^n(1 - z) = 0 \\
 &\iff 1 + z - z^n - z^{n+1} = 0 \\
 &\iff 1 + z - z^n(1 + z) = 0
 \end{aligned}$$

$$\boxed{(E) \iff (1 - z^n)(1 + z) = 0}$$

2°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} 1^k + 1^n = 1 + 2(n-1) + 1 = 2n \neq 0 \text{ donc } 1 \text{ n'est pas solution de } (E).$$

On peut donc supposer dans la suite $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff (1 - z^n)(1 + z) = 0 \quad \text{par 1} \\
 &\iff z^n = 1 \text{ ou } z = -1 \\
 &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \text{ ou } z = -1
 \end{aligned}$$

Si $0 \leq k \leq n-1$, $e^{i \frac{2k\pi}{n}} = 1 \iff k = 0$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\{-1\} \cup \{e^{i \frac{2k\pi}{n}} / k \in \{1, \dots, n-1\}\}$.

$(-1)^n = -1$ car n est impair donc -1 n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$, donc -1 n'est pas de la forme $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ où $1 \leq k \leq n-1$.

De plus, les $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ avec $1 \leq k \leq n-1$ sont distincts 2 à 2.

Ainsi, (E) possède n solutions.

3°) Soit $u \in \mathbb{C}$. $1 - iu = 0 \iff u = \frac{1}{i} \iff u = -i$.

On suppose $u \neq -i$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + iu}{1 - iu} = e^{i\varphi} &\iff 1 + iu = e^{i\varphi}(1 - iu) \\
 &\iff iu(1 + e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} - 1 \\
 &\iff u = \frac{e^{i\varphi} - 1}{i(1 + e^{i\varphi})} \quad \text{car } e^{i\varphi} \neq -1 \text{ puisque } \varphi \text{ ne s'écrit pas } \pi + 2p\pi \text{ où } p \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\frac{e^{i\varphi} - 1}{i(1 + e^{i\varphi})} = \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}})}{ie^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{i\frac{\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\varphi}{2}})} = \frac{2i \sin(\frac{\varphi}{2})}{i2 \cos(\frac{\varphi}{2})} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right). \text{ De plus, } \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq -i.$$

Ainsi, $(*)$ admet une seule solution : le réel $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

4°) Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

$$\begin{aligned}
 (E') &\iff \frac{1 + iu}{1 - iu} \text{ est solution de } (E) \\
 &\iff \frac{1 + iu}{1 - iu} = -1 \text{ ou } \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, \frac{1 + iu}{1 - iu} = e^{i \frac{2k\pi}{n}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1 + iu}{1 - iu} = -1 \iff 1 + iu = -1 + iu \iff \underbrace{-1 = 1}_{\text{exclu}}.$$

Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\frac{2k\pi}{n} \in]0, 2\pi[$. De plus, $\frac{2k\pi}{n} = \pi \iff k = \frac{n}{2}$. Or $k \neq \frac{n}{2}$ car n est impair. Ainsi $\frac{2k\pi}{n}$ ne s'écrit pas $\pi + 2p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Donc, par 3, } \frac{1 + iu}{1 - iu} = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \iff u = \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Les nombres trouvés sont bien distincts de $-i$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) / k \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$.

Exercice 4

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$, on doit résoudre : $f(z) = -2 \iff z - z^2 = -2 \iff z^2 - z - 2 = 0$.

Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = 9 = 3^2$, donc ses racines, autrement

dit les antécédents de -2 , sont $\frac{1+3}{2} = 2$ et $\frac{1-3}{2} = -1$.

Comme il existe un élément de $\mathbb{C}$ avec plusieurs antécédents, on en tire que f n'est pas injective.

2°) Soit z_1 et z_2 deux complexes distincts.

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\iff z_1 - z_1^2 = z_2 - z_2^2 \\ &\iff z_1 - z_2 = (z_1^2 - z_2^2) \\ &\iff z_1 - z_2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(z_1) = f(z_2) \iff z_1 + z_2 = 1} \quad \text{car } z_1 - z_2 \neq 0$$

La condition s'écrit : $\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2}$. En notant M_1 le point d'affixe z_1 , M_2 le point d'affixe z_2 , et

A le point d'affixe $\frac{1}{2}$, cette condition revient à dire que A est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

3°) Soit $w \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = w \iff -z^2 + z - w = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients complexes, donc elle admet toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$. Donc f est surjective.

L'équation admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4(-w)(-1) = 1 - 4w$, donc $\Delta = 0 \iff w = \frac{1}{4}$.

Ainsi, il y a un seul élément de $\mathbb{C}$ qui admet un seul antécédent, c'est $\frac{1}{4}$.

4°) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \iff f(z) \in \mathbb{R}$.

Notons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

On a $f(z) = (x + iy)(1 - x - iy)$ donc $\operatorname{Im}(f(z)) = y(1 - x) - xy = y - 2xy = y(1 - 2x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff y(1 - 2x) = 0 \\ &\iff y = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\ &\iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z = \frac{1}{2} + iy, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\frac{1}{2} + iy/y \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement, il s'agit de la réunion de l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) et de la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

5°) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$f\left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right) = \left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{2} - e^{i\theta}\right) = \left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right)\left(\frac{1}{2} - e^{i\theta}\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right) = \frac{1}{4} - e^{i2\theta}}$$

b) Par définition, $\Gamma = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1\right\}$; mais comme les complexes de module 1 sont les nombres s'écrivant $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on peut obtenir une forme paramétrée :

$$\Gamma = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists \theta \in \mathbb{R}, z - \frac{1}{2} = e^{i\theta}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Cela permet d'affirmer que $f(\Gamma) = \left\{f\left(\frac{1}{2} + e^{i\theta}\right) \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

D'après la question a, on a donc $f(\Gamma) = \left\{\frac{1}{4} - e^{i2\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{1}{4} + e^{i(\pi+2\theta)} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$;

et comme $\pi + 2\theta$ décrit $\mathbb{R}$ quand θ décrit $\mathbb{R}$, $f(\Gamma) = \left\{\frac{1}{4} + e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

Comme plus haut, on peut réécrire : $f(\Gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{1}{4}\right| = 1\right\}$.

Il s'agit du cercle Γ' de centre $\frac{1}{4}$ et de rayon 1.