

	Vrai	Faux
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On a : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X > k) - P(X > k - 1)$	☐	☐
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On a : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$	☐	☐
Il est possible que l'on ait $V(X) = 0$.	☐	☐
Si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, alors e^X a une espérance et on a : $E(e^X) = \sum_{k=0}^n e^k P(X = k)$	☐	☐
Si X admet une espérance, alors $ X $ admet aussi une espérance.	☐	☐
On suppose que la loi de X est donnée par : $P(X = -1) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{2}{3}$	☐	☐
La variable centrée réduite associée à X est $X^* = \frac{3X - 1}{2\sqrt{2}}$.	☐	☐
Si X admet une espérance et un moment d'ordre 2, alors on a : $(E(X))^2 > E(X^2)$	☐	☐
On désigne par c un réel et on suppose que la variable aléatoire X possède une variance. Les variables aléatoires X , $c + X$ et $c - X$ ont la même variance.	☐	☐
Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A)P(\bar{B}) + P(B)$.	☐	☐
On lance un dé deux fois, on note A l'événement « Le premier lancer donne un 6 » et B l'événement « La somme des numéros obtenus à ces deux lancers est égale à 11 ». On a $P_A(B) = 1/36$.	☐	☐
On lance quatre fois une pièce et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note P_n (resp. F_n) l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne un <i>Pile</i> (resp. <i>Face</i>) ». Les événements $P_1 \cap F_2$ et $P_3 \cap F_4$ sont indépendants.	☐	☐
On lance trois fois une pièce donnant <i>Pile</i> avec la probabilité p ($0 < p < 1$). Avec les mêmes notations qu'au V/F 9 , on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $E_n = P_n \cap P_{n+1}$. Par indépendance des lancers, on a : $P(E_1 \cap E_2) = p^4$.	☐	☐

	Vrai	Faux
Si X suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $2X$ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 2, 2n \rrbracket)$.	☐	☐
Si X suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$, alors on a : $E(X) = \frac{n+2}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2}{12}$.	☐	☐
Si X suit la loi $\mathcal{B}(p)$, alors $1 - X$ suit aussi la loi $\mathcal{B}(p)$.	☐	☐
Les deux propositions suivantes sont équivalentes : « X suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ » et « X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ ».	☐	☐
Si la loi de X est donnée par : $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$, alors X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.	☐	☐
Si la loi de X est donnée par : $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$, alors X suit une loi uniforme.	☐	☐
Si X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors on a : $P(X \geq 1) = 1 - p^n$.	☐	☐
Si X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors on a : $P(X = 0) = (1 - p)^n$.	☐	☐
Si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors on a : $P(X > n) = (1 - p)^n$.	☐	☐

1. On peut raisonner comme ceci :

Pour tout entier naturel k , on a, par définition de " $\geq$ " :

$$(X \geq k) = (X > k) \cup (X = k)$$

Les événements $(X > k)$ et $(X = k)$ étant incompatibles, on en déduit :

$$P(X \geq k) = P(X > k) + P(X = k)$$

On obtient alors :

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X > k)$$

Comme X prend des valeurs entières, on a (il faut un peu y réfléchir) : $(X \geq k) = (X > k - 1)$.

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$$

Remarque. Pour $k = 0$, cette égalité devient $P(X = 0) = P(X > -1) - P(X > 0) = 1 - P(X > 0)$ (car $X(\Omega) = \mathbb{N}$), ce qui est correct puisque $((X = 0), (X > 0))$ est un système complet d'événements.

2. On peut raisonner comme ceci :

Pour tout entier naturel k , on a, par définition du symbole " $\leq$ " :

$$(X \leq k) = (X < k) \cup (X = k)$$

Les événements $(X < k)$ et $(X = k)$ étant incompatibles, on en déduit :

$$P(X \leq k) = P(X < k) + P(X = k)$$

On obtient donc :

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X < k)$$

Comme X prend des valeurs entières, on a : $(X < k) = (X \leq k - 1)$.

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$

Remarque. Pour $k = 0$, cette égalité devient $P(X = 0) = P(X \leq 0) - P(X \leq -1) = P(X \leq 0)$ (car $X(\Omega) = \mathbb{N}$), ce qui est correct puisque les événements $(X = 0)$ et $(X \leq 0)$ sont égaux, toujours parce que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

3. Il est possible que $V(X) = 0$. Il suffit de choisir une variable aléatoire X ne prenant qu'une seule valeur a (non nulle), avec la probabilité 1. On a alors :

- $E(X) = a \times 1 = a$.
- $E(X^2) = a^2 \times 1 = a^2$.
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = a^2 - a^2 = 0$.

4. Comme $X(\Omega)$ est fini, e^X a une espérance et le théorème de transfert assure que :

$$E(e^X) = \sum_{k=0}^n e^k P(X = k)$$

5. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

X possède une espérance signifie que la série $\sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ converge absolument, c'est-à-dire

que la série $\sum |x_i P(X = x_i)|$ converge, ou encore que la série $\sum |x_i| P(X = x_i)$ converge.

Cette dernière série étant celle qui, grâce au théorème de transfert, donne l'espérance de $|X|$, on en conclut que, si X admet une espérance, alors $|X|$ en admet une aussi.

6. Comme la loi de X est donnée par : $P(X = -1) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 1) = \frac{2}{3}$, on a :

- $E(X) = (-1) \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- $E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

$$\text{On a donc : } X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = \frac{X - \frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3(X - \frac{1}{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{3X - 1}{2\sqrt{2}}.$$

7. On sait que la variance d'une variable aléatoire est positive et égale à $E(X^2) - (E(X))^2$, on a donc : $E(X^2) \geq (E(X))^2$, et pas le contraire.

8. En appliquant la **propriété 24.6**, on a bien :

$$V(X) = V(c + X) = V(c - X)$$

7. Par la formule du crible, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

L'indépendance de A et B assure que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

On obtient alors : $P(A \cup B) = P(A)(1 - P(B)) + P(B)$.

On en déduit que : $P(A \cup B) = P(A)P(\overline{B}) + P(B)$.

8. On a $P(A) = \frac{1}{6} \neq 0$, et par définition, on a : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$A \cap B$ signifie ici : « obtenir 6 au premier lancer et 5 au second ».

En notant C : « obtenir 5 au deuxième lancer », l'indépendance des lancers donne :

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. On en déduit que : $P_A(B) = \frac{1}{6}$.

Remarque. Plus simplement, si l'on sait que le premier lancer a donné 6, alors, pour avoir une somme égale à 11, il faut et il suffit que l'on obtienne 5 au deuxième lancer, ce qui donne bien

$P_A(B) = \frac{1}{6}$.

9. Les événements P_n étant mutuellement indépendants, le "lemme des coalitions" assure que $P_1 \cap \overline{P_2}$ et $P_3 \cap \overline{P_4}$ sont indépendants (chacun de ces deux événements concernent des lancers distincts).

10. On a : $E_1 \cap E_2 = (P_1 \cap P_2) \cap (P_2 \cap P_3) = P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Par indépendance, $P(E_1 \cap E_2) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = p^3$, qui est différent de p^4 (car p n'est ni égal à 0, ni égal à 1).

1. Si X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors le support de la variable $2X$ est $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ qui est différent de $\llbracket 2, 2n \rrbracket$. Ainsi, la variable $2X$ ne suit pas la loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$.

2. On sait que si X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

On en déduit que si X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a (en remplaçant n par $n+1$) :

$E(X) = \frac{n+2}{2}$ et $V(X) = \frac{(n+1)^2-1}{12} = \frac{n^2+2n}{12}$. Ainsi, $V(X) \neq \frac{n^2}{12}$.

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p .

Le support de la variable aléatoire $1-X$ est $\{0, 1\}$ et on a :

$P(1-X=0) = P(X=1) = p$ et $P(1-X=1) = P(X=0) = 1-p$.

On en déduit que la variable $1-X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-p$.

4. X suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ signifie : $X(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$ et $P(X=1) = P(X=0) = \frac{1}{2}$.

X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ signifie : $X(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$ et $P(X=1) = P(X=0) = \frac{1}{2}$.

La proposition « X suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ » est bien équivalente à « X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ ».

5. Le support d'une variable suivant une loi de Bernoulli est l'ensemble $\{0, 1\}$.

Ici, on a $X(\Omega) = \{1, 2\}$ donc X ne suit pas une loi de Bernoulli.

6. Le fait que : $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$ définit complètement la loi de la variable X puisque $P(X=1) + P(X=2) = 1$. L'équiprobabilité garantit que X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 2 \rrbracket$.

7. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors, en posant $q = 1 - p$, on a :
 $P(X \geq 1) = P(\overline{X=0}) = 1 - P(X=0) = 1 - q^n$, ce qui n'est pas nécessairement égal à $1 - p^n$
 (sauf si $p = q$, c'est-à-dire si $p = \frac{1}{2}$).

8. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors on a effectivement :

$$P(X=0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$$

9. Si X suit la loi géométrique de paramètre p , en posant $q = 1 - p$, on a :

$$P(X > n) = P(\overline{X \leq n}) = 1 - P(X \leq n).$$

Or, $P(X \leq n) = P\left(\bigcup_{k=1}^n [X=k]\right)$ et, par incompatibilité des événements $(X=k)_{1 \leq k \leq n}$, on en

déduit que : $P(X \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X=k) = \sum_{k=1}^n q^{k-1} p = p \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$ (car q est différent de 1).

On a donc bien : $P(X > n) = q^n$.

Remarque. Plus élégamment, si l'on se souvient que X est le temps d'attente du premier succès, dire que $(X > n)$ est réalisé, c'est dire que les n premières épreuves ont été des échecs. Par indépendance de ces épreuves, on a tout de suite : $P(X > n) = q^n$.

10. Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ , on a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On en déduit ainsi que : $P(X > 0) = P(\overline{X=0}) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$.

On obtient alors : $P(X > 0) = 1 - e^{-\lambda} \neq 1$.

❑ Les erreurs classiques

- À elles seules, les valeurs des $P(X=x_k)$ ne suffisent pas pour reconnaître une loi usuelle, on a besoin en plus de vérifier que le support de X est "le bon". Il faut absolument connaître les supports des lois usuelles par cœur.
- La loi géométrique a pour support $\mathbb{N}^*$ et pas $\mathbb{N}$.
- La loi de Poisson a pour support $\mathbb{N}$ et pas $\mathbb{N}^*$.