

1 Généralités

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème 1

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés **nombre complexes**, tel que :

- (1) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$,
- (2) $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations, l'addition (notée $+$) et la multiplication (notée $\times$), qui suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$,
- (3) $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que : $i^2 = -1$,
- (4) tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

Exemples

$2 + 3i$, $-i$, 5 sont des nombres complexes.

Définitions 1

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe.

- L'écriture $a + ib$ est appelée **la forme** (ou l'écriture) **algébrique** de z .
- Le réel a est appelé **la partie réelle** de z et on note $a = \operatorname{Re}(z)$.
- Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z et on note $b = \operatorname{Im}(z)$.

Exemples

- 1) Si $z = 2 + 3i$, alors $2 + 3i$ est la forme algébrique de z , avec : $\operatorname{Re}(z) = 2$ et $\operatorname{Im}(z) = 3$.
- 2) Si $z = -i$, alors $-i$ est la forme algébrique de z , avec : $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = -1$.
- 3) Si $z = 5$, alors 5 est la forme algébrique de z , avec : $\operatorname{Re}(z) = 5$ et $\operatorname{Im}(z) = 0$.

• **Remarques :** Soit z un nombre complexe.

– Lorsque $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est **imaginaire pur**.

– Lorsque $\operatorname{Im}(z) = 0$, z est réel.

Tout nombre réel a s'écrit de manière unique sous la forme $a = a + 0i$.

Théorème 2

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

En particulier, puisque $0 = 0 + 0i$, pour tout nombre complexe z :

$$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0.$$

1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définitions 2

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

- Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe.

L'unique point M du plan dont les coordonnées cartésiennes dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ sont $(a ; b)$ est appelé **l'image de z** et on note $M(z)$.

- Soit M un point de coordonnées cartésiennes $(a ; b)$ dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'afixe du point M** .

• Le théorème 1 est admis.

• On écrit indifféremment $a + ib$ ou $a + bi$.

• L'article défini « la » est justifié puisque, d'après l'énoncé (4) du théorème 1, il y a unicité de l'écriture $z = a + ib$, donc unicité de a et b .

• Attention, la partie imaginaire d'un nombre complexe z , $\operatorname{Im}(z)$ est un réel.

• On retrouve ainsi que : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

• Le théorème 2 résulte immédiatement de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe (énoncé (4) du théorème 1).

VOIR ACTIVITÉ 2

• Attention, le mot **afixe** est du genre féminin (une affixe).
 • Un point M étant donné, on utilisera la notation z_M pour désigner l'afixe de M .

Soit M un point du plan orienté muni d'un repère orthonormé direct et z un nombre complexe. On peut écrire :

M est l'image de $z \Leftrightarrow z$ est l'afixe de M .

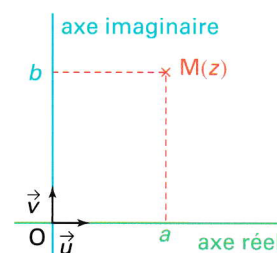
On peut ainsi « identifier » le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct et l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, ce qui justifie que l'on appelle **plan complexe** le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct dans lequel on représente les nombres complexes.

• Dans le plan complexe, la notation $M(z)$ signifie que : M est l'image de z ou z est l'afixe de M ou M est le point d'afixe le nombre complexe z .

Remarque : Soit M le point d'afixe $z = a + ib$, avec a et b réels, dans le plan complexe.

– Si $a = 0$, alors $z = bi$ donc z est imaginaire pur, et M a pour coordonnées $(0 ; b)$ donc M appartient à l'axe des ordonnées que l'on appelle **l'axe imaginaire**.

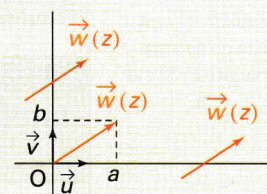
– Si $b = 0$, alors $z = a$ donc z est réel, et M a pour coordonnées $(a ; 0)$ donc M appartient à l'axe des abscisses que l'on appelle **l'axe réel**.



Définition 3

Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan complexe, de coordonnées $(a ; b)$.

Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'afixe du vecteur $\vec{w}$** .



• Un vecteur $\vec{w}$ du plan complexe étant donné, on utilisera la notation $z_{\vec{w}}$ pour désigner l'afixe du vecteur $\vec{w}$.

Remarques :

1) Ainsi, dire que z est l'afixe du point M équivaut à dire que z est l'afixe du vecteur $\vec{OM}$.

2) L'identification de $\mathbb{C}$ au plan complexe permet d'affirmer que l'on ne peut pas prolonger dans $\mathbb{C}$ la relation d'ordre $\leq$ définie dans $\mathbb{R}$.

En effet, comparer deux nombres complexes reviendrait à comparer deux points (ou deux vecteurs) du plan, ce qui n'a pas de sens.

2 Opérations dans $\mathbb{C}$

VOIR ACTIVITÉ 2

2.1 Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Définitions 4

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, deux nombres complexes.

(1) **La somme de z et z'** est le nombre complexe :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b').$$

(2) **Le produit de z et z'** est le nombre complexe :

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

• Comme dans $\mathbb{R}$, on écrit zz' au lieu de $z \times z'$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque : En particulier, le produit d'un nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, par un réel k est le nombre complexe $kz = ka + ikb$.

Propriété 1

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

• La propriété 1 est admise. On calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ mais en tenant compte de $i^2 = -1$.

• La démonstration de la propriété 2 est immédiate. z admet un opposé dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, il existe un nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$.

Application 1

Énoncé : Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = 4 + 5i$.

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes $z + z'$ et zz' .

Solution :

• **1^{re} méthode :** on applique les définitions 4.

$$z + z' = (2 + 4) + i(3 + 5) = 6 + 8i.$$

$$zz' = (2 \times 4 - 3 \times 5) + i(2 \times 5 + 3 \times 4) = (8 - 15) + i(10 + 12) = -7 + 22i.$$

• **2^e méthode :** on applique la propriété 1, en tenant compte de $i^2 = -1$.

$$z + z' = 2 + 3i + 4 + 5i = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 8i.$$

$$\begin{aligned} zz' &= (2 + 3i)(4 + 5i) = 2 \times 4 + 2 \times 5i + 3i \times 4 + 3i \times 5i \quad (\text{on développe comme dans } \mathbb{R}) \\ &= 8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 10i + 12i - 15 \quad (\text{on réduit en tenant compte de } i^2 = -1) \\ &= (8 - 15) + i(10 + 12) \quad (\text{on regroupe les parties réelles et les parties imaginaires}) \\ &\text{ce qui donne : } zz' = -7 + 22i. \end{aligned}$$

Propriété 2

Tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, admet un opposé dans $\mathbb{C}$, le nombre complexe $-a - ib$, noté $-z$.

Définition 5

La différence de deux nombres complexes z et z' est le nombre complexe :

$$z - z' = z + (-z').$$

Remarques :

1) On a, dans $\mathbb{C}$, les mêmes identités remarquables que dans $\mathbb{R}$:

pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' ,

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2; \quad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2; \quad (z + z')(z - z') = z^2 - z'^2.$$

En particulier : pour tout réel a et tout réel b ,

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

2) Dans $\mathbb{C}$, comme dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Application 2

Énoncé : Déterminer la forme algébrique de $(1 - 3i)^2$.

Solution :

$$\begin{aligned} (1 - 3i)^2 &= 1^2 - 2 \times (1 \times 3i) + (3i)^2 && (\text{on utilise l'identité remarquable}) \\ &= 1 - 6i + 9i^2 = 1 - 6i - 9 && (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \text{ avec } z = 1 \text{ et } z' = 3i \\ &= (1 - 9) - 6i && (\text{on réduit en tenant compte de } i^2 = -1) \\ &= -8 - 6i && (\text{on regroupe les parties réelles et les parties imaginaires}) \\ &\text{ce qui donne : } (1 - 3i)^2 = -8 - 6i. \end{aligned}$$

Application 3

Énoncé : 1) Soit z un nombre complexe quelconque. Calculer $(z - 2i)(z + 2i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 4 = 0$.

Solution :

$$1) (z - 2i)(z + 2i) = z^2 - (2i)^2 = z^2 - 2^2i^2 = z^2 + 4.$$

$$2) z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0 \text{ ou } z + 2i = 0 \quad (\text{règle du produit nul})$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i.$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 4 = 0$ sont les nombres complexes $-2i$ et $2i$.

Propriété 3

Tout nombre complexe z non nul admet un inverse unique dans $\mathbb{C}$, noté $\frac{1}{z}$.

• z admet un inverse dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, il existe un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.

• On voit, dans le paragraphe 3, une méthode simple pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe non nul.

Démonstration

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe non nul.

On a démontré que : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

D'après le théorème 2 : $z \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$; ainsi : $a^2 + b^2 \neq 0$.

On suppose donc que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Donc :

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2 + b^2}(a + ib)(a - ib) = 1 \Leftrightarrow (a + ib) \left[\frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib) \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow (a + ib) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = 1,$$

ce qui signifie que le nombre complexe $a + ib$ admet un inverse dans $\mathbb{C}$, le nombre complexe $z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$.

Si un nombre complexe (comme un nombre réel) non nul admet un inverse, alors cet inverse est unique. En effet, on suppose que z admet un autre inverse z'' .

Alors : $zz' = 1$ et $zz'' = 1 \Rightarrow zz' - zz'' = 0 \Rightarrow z(z' - z'') = 0 \Rightarrow z' = z''$ (car $z \neq 0$).

Définition 6

Soit z et z' deux nombres complexes, z' non nul.

Le quotient de z par z' est le nombre complexe $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

2.2 Interprétation géométrique de la somme et de la différence de deux nombres complexes dans le plan complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Propriété 4

Soit z, z' deux nombres complexes et M, M' les deux points du plan complexe d'abscisses respectives z, z' .

Soit S un point du plan complexe.

Le point S a pour affixe $z + z'$ si et seulement si $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM}'$.

Démonstration

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels.

Alors $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

Donc, S étant un point du plan complexe :

S a pour affixe $z + z' \Leftrightarrow S$ a pour coordonnées

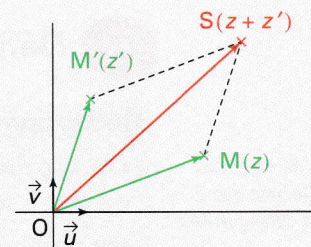
$$(a + a' ; b + b')$$

$$\Leftrightarrow \vec{OS} \text{ a pour coordonnées } (a + a' ; b + b')$$

$$\Leftrightarrow \vec{OS} = (a + a')\vec{u} + (b + b')\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OS} = a\vec{u} + b\vec{v} + a'\vec{u} + b'\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM}'.$$



• $OM(z)S(z+z')M'(z')$ est un parallélogramme.

► **Remarque :** Soit z un nombre complexe, et M, M' les points du plan complexe d'abscisses respectives $z, -z$.

O a pour affixe $z + (-z) = 0$; donc, d'après la propriété 4 : $\vec{OM} + \vec{OM'} = \vec{OO} = \vec{0}$, ce qui prouve que $M'(-z)$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à O .

Propriété 5

Soit z, z' deux nombres complexes, et M, M' les deux points du plan complexe d'affixes respectives z, z' .

La différence $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

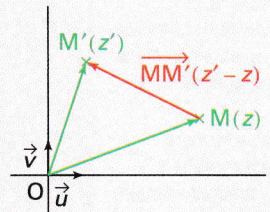
Démonstration

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels.

Alors $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$.

Or $(a' - a; b' - b)$ est le couple de coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Donc $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.



● **Remarque :** Soit z, z' deux nombres complexes, et M, M' les points du plan complexe d'affixes respectives z, z' . On note D le point du plan complexe d'affixe $z' - z$.

D a pour affixe $z' - z \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}$ a pour affixe $z' - z$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{MM'}$ d'après la propriété 4

$\Leftrightarrow OMM'D$ est un parallélogramme.

Application 4

Énoncé : Soit A, B, C les trois points du plan complexe d'affixes respectives $3 - i, 2 + 2i, -1 + i$. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution : $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

D'après la propriété 4 :

$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $2 + 2i - (3 - i) = -1 + 3i$;

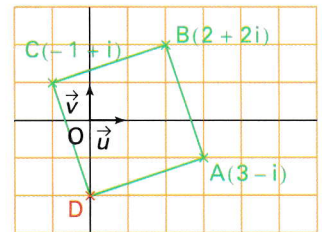
$\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $-1 + i - z_D$.

Donc :

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow -1 + 3i = -1 + i - z_D$

$\Leftrightarrow z_D = -1 + i - (-1 + 3i)$

$\Leftrightarrow z_D = -2i$.



3 Nombres complexes conjugués

3.1 Définition et interprétation géométrique

Définition 7

On appelle **nombre complexe conjugué** d'un nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont deux réels, le nombre complexe $a - ib$.

On note : $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$.

● On dit aussi plus simplement que $\bar{z}$ est le conjugué de z .

Exemples

$\overline{1 + i} = 1 - i$; $\overline{2i} = \overline{0 + 2i} = 0 - 2i = -2i$; $\overline{3} = \overline{3 + 0i} = 3 - 0i = 3$.

● **Remarque :** Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe.

$\bar{\bar{z}} = a - ib$, donc $\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.

Le conjugué de z est $\bar{z}$ et le conjugué de $\bar{z}$ est z : on dit que z et $\bar{z}$ sont deux nombres complexes conjugués.

- La propriété 6 constitue l'interprétation géométrique de z et $\bar{z}$ qui sont deux nombres complexes conjugués.

Propriété 6

Soit z un nombre complexe.

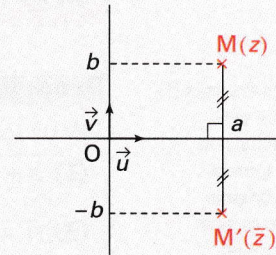
Les points M et M' du plan complexe d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe.

Dire que M a pour affixe z équivaut à dire que M a pour coordonnées cartésiennes $(a; b)$ et dire que M' a pour affixe $\bar{z}$ équivaut à dire que M' a pour coordonnées cartésiennes $(a; -b)$.

Ainsi, M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées, donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



3.2 Propriétés

Propriété 7

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, $z\bar{z} = a^2 + b^2$, donc $z\bar{z}$ est un réel positif.

Démonstration

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe.

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

Pour tout réel a et tout réel b , $a^2 + b^2$ est un réel positif, donc $z\bar{z}$ est un réel positif.

Remarque : La propriété 7 donne une méthode simple pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe $z = a + ib$ non nul, avec a et b réels. En effet :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Cela permet donc aussi de déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{z'}{z}$ (avec $z' \neq 0$) de deux nombres complexes.

Application 5

Énoncé : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du premier degré : $(3 + 5i)z = 1 - 2i$.

Solution :

$$3 + 5i \neq 0, \text{ donc : } (3 + 5i)z = 1 - 2i \Leftrightarrow z = \frac{1 - 2i}{3 + 5i}.$$

L'équation a une solution unique, dont on détermine la forme algébrique en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué $3 - 5i$ du dénominateur :

$$\frac{1 - 2i}{3 + 5i} = \frac{(1 - 2i)(3 - 5i)}{(3 + 5i)(3 - 5i)} = \frac{3 - 5i - 6i + 10i^2}{3^2 + 5^2} = \frac{3 - 5i - 6i - 10}{9 + 25} = \frac{-7 - 11i}{34} = -\frac{7}{34} - \frac{11}{34}i.$$

Conclusion :

La solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(3 + 5i)z = 1 - 2i$ est le nombre complexe $-\frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$.

Propriétés 8

Pour tout nombre complexe z :

- (1) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.
- (2) z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
- (3) z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

BAC

- Les énoncés (1), (2), (3) et (4) se déduisent des formes algébriques de la somme, du produit, du quotient de deux nombres complexes.
- On pose : $z^0 = 1$ et $\bar{z}^0 = \bar{z}^0$.
- Pour des exemples d'application des propriétés 8 et 9 :

**VOIR EXERCICES
RÉSOLUS 2 ET 3**

Démonstration

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe.

$$(1) z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z).$$

$$z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z).$$

On en déduit que :

$$(2) z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2i\operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \text{ est réel.}$$

$$(3) z = -\bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur.}$$

Propriétés 9

Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' :

$$(1) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}.$$

$$(2) \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}.$$

$$(3) \text{ si } z \neq 0, \text{ alors } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

$$(4) \text{ si } z' \neq 0, \text{ alors } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

$$(5) \text{ si } z \neq 0, \text{ pour tout entier relatif } n, \bar{z}^n = \overline{z^n}.$$

Démonstration

(5) On démontre d'abord facilement par récurrence sur n que :

pour tout nombre complexe z non nul et tout entier naturel n , $\bar{z}^n = \overline{z^n}$.

• Soit z un nombre complexe non nul et n un entier relatif strictement négatif.

Alors $n = -m$ avec m entier naturel.

$$\text{Donc : } \bar{z}^n = \overline{z^{-m}} = \overline{\left(\frac{1}{z^m}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^m} \text{ d'après la propriété (3).}$$

$$\text{Or : } \bar{z}^m = \overline{z^m} \text{ car } m \in \mathbb{N}. \text{ Donc : } \bar{z}^n = \frac{1}{\bar{z}^m} = \bar{z}^{-m} = \bar{z}^n.$$

• Conclusion : pour tout nombre complexe z non nul et tout entier relatif n , $\bar{z}^n = \overline{z^n}$.

4 Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b, c sont trois réels avec a non nul, c'est déterminer tous les nombres complexes z tels que $az^2 + bz + c = 0$.

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Théorème 3

Soit a, b, c trois réels avec a non nul, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

– Si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$, une solution réelle :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

– Si $\Delta < 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

- Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b, c réels, $a \neq 0$, admet toujours deux solutions (distinctes ou confondues). Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont aussi appelées les **racines** de l'expression $az^2 + bz + c$.

BAC

Démonstration

• On procède comme dans $\mathbb{R}$, en utilisant des identités remarquables et la règle du produit nul.

• Lorsque $\Delta \geq 0$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $a \neq 0$, sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.

a, b, c étant trois réels avec $a \neq 0$: pour tout nombre complexe z ,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Donc, dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu deux solutions réelles distinctes.

- Si $\Delta = 0$, alors :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}.$$

On a bien obtenu une solution réelle.

- Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$, donc $\Delta = -(\sqrt{-\Delta})^2 = -1 \times (\sqrt{-\Delta})^2 = i^2 \times (\sqrt{-\Delta})^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$.

D'où :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

On pose : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Alors : $\bar{z}_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = z_2$.

On a bien obtenu deux solutions complexes conjuguées.

Application 6

Énoncé : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Solution : On calcule le discriminant de l'équation : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

$\Delta < 0$, donc, d'après le théorème 3, l'équation admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2 \times 1}, \quad \text{c'est-à-dire : } z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

• Une équation **incomplète** est une équation de la forme $az^2 + bz = 0$ avec $ab \neq 0$ ou $az^2 + c = 0$ avec $ac \neq 0$. Dans les deux cas, $\Delta \neq 0$.

Remarque : Lorsqu'on doit résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré « incomplète », on peut conclure directement sans utiliser le théorème 3, en se souvenant qu'il y a toujours deux solutions distinctes.

Application 7

Énoncé : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z^2 - z = 0$.

2) $4z^2 + 3 = 0$.

Solution :

1) $2z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(2z - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2}$.

2) $4z^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (2z)^2 - 3i^2 = 0 \Leftrightarrow (2z)^2 - (i\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow (2z - i\sqrt{3})(2z + i\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow z = i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z = -i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5 Module d'un nombre complexe

5.1 Définition et interprétation géométrique

• Pour tout nombre complexe z , $|z|$ est un **réel positif**.

• La notion de module dans $\mathbb{C}$ prolonge la notion de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

• La propriété 10 constitue l'**interprétation géométrique**, dans le plan complexe, de la notion de module d'un nombre complexe. Pour des exemples d'application de cette interprétation géométrique :

VOIR EXERCICE RÉSOLU 2

• La propriété 11 est une conséquence immédiate de la propriété 7 et de la définition 8.

Définition 8

Soit $z = a + ib$ avec a et b réels, un nombre complexe.

On appelle **module de z** le réel noté $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• **Remarque :** Lorsque z est réel, alors il existe un réel a tel que $z = a + 0 \times i$.

Donc : $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$.

On lit : « le module de z est égal à la valeur absolue de a ».

Ainsi, lorsque z est réel, le module de z est la valeur absolue de z (puisque $z = a$). C'est cette égalité entre module et valeur absolue obtenue pour les réels en tant que nombres complexes particuliers qui justifie que l'on utilise la même notation pour les deux notions.

Exemples

$$|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}; \quad |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}; \quad |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2;$$

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1; \quad |5| = 5; \quad |-3| = 3.$$

Propriété 10

Soit z un nombre complexe.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

(1) soit M le point d'affixe z ; alors : $OM = |z|$;

(2) soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe z ; alors $\|\vec{w}\| = |z|$.

Démonstration

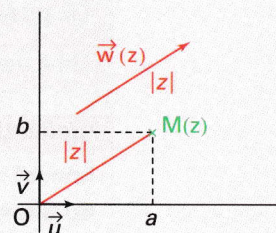
(1) Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

z est l'affixe de M , donc M a pour coordonnées cartésiennes le couple $(a; b)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Donc : $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

D'où : $|z| = OM$.

(2) La démonstration est analogue à la précédente.



5.2 Propriétés des modules

Propriété 11

Pour tout complexe z , $|z|^2 = z\bar{z}$ ou $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Propriétés 12

Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' :

(1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. (2) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$. (3) $|zz'| = |z||z'|$.

(4) si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. (5) si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

(6) si $z \neq 0$, pour tout entier relatif n , $|z^n| = |z|^n$.

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes.

(1) $|z| = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

BAC

(2) D'après la propriété 11 :

$$|z|^2 = z\bar{z}; \quad |\bar{z}|^2 = \bar{z}z; \quad |-z|^2 = (-z)(-\bar{z}).$$

Or : $\bar{\bar{z}} = z$, donc : $|\bar{z}|^2 = \bar{z}z = z\bar{z} = |z|^2$.

D'autre part : $-\bar{z} = (-1)\bar{z}$ (propriété 9-(2)) ; or : $-1 \in \mathbb{R}$, donc $\overline{-1} = -1$.

D'où : $-\bar{z} = (-1)\bar{z} = -\bar{z}$; donc : $|-z|^2 = (-z)(-\bar{z}) = z\bar{z} = |z|^2$.

Ainsi : $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = |-z|^2$, et comme $|z|$, $|\bar{z}|$ et $|-z|$ sont des réels positifs, on en déduit que : $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

$|z| = |\bar{z}| \Rightarrow |-z| = |-\bar{z}|$; or : $|-\bar{z}| = |-\bar{z}|$; donc $|-z| = |-\bar{z}|$.

On a donc bien : $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$.

(3) $|zz'|^2 = (zz')(\overline{zz'})$ (propriété 11)

$$= (zz')(\bar{z}\bar{z}') \quad (\text{propriété 9-(2)})$$

$$= z\bar{z}z'\bar{z}' = |z|^2|z'|^2 \quad (\text{propriété 11}).$$

$$= (|z||z'|)^2$$

Or $|zz'|$ et $|z||z'|$ sont des réels positifs, donc : $|zz'| = |z||z'|$.

(4) La démonstration est analogue à celle du (3).

(5) Cette propriété se déduit immédiatement des propriétés (3) et (4).

(6) Si $z \neq 0$, pour tout entier relatif n :

$$|z^n|^2 = z^n \bar{z}^n \quad (\text{propriété 11})$$

$$= z^n \bar{z}^n \quad (\text{propriété 9-(5)})$$

$$= (z\bar{z})^n = (|z|^2)^n = |z|^{2n} = (|z|^n)^2.$$

Or $|z^n|$ et $|z|^n$ sont des réels positifs, donc : $|z^n| = |z|^n$.

• On peut aussi démontrer la propriété (6) en deux étapes, comme pour la propriété 9-(5).

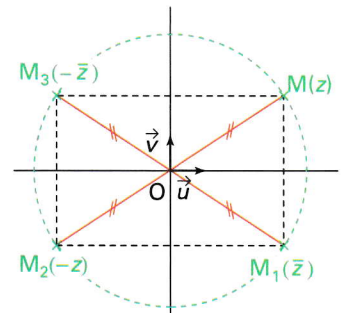
• On justifie ainsi géométriquement la propriété 12-(2), qui signifie que les points M, M_1, M_2, M_3 sont cocycliques. Mais on obtient un résultat plus « précis » puisque l'on démontre que $MM_1M_2M_3$ est un rectangle.

Remarque : Soit z un nombre complexe, $z \neq 0$, et M l'image de z dans le plan complexe. Alors, d'après la propriété 6, l'image M_1 de $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

De plus, on a vu que l'image M_2 de $-z$ est le symétrique de M par rapport à O , donc aussi que l'image M_3 de $-\bar{z}$ est le symétrique de M_1 par rapport à O .

On en déduit que O est le milieu de $[MM_2]$ et de $[M_1M_3]$, avec $OM = OM_1$, donc : $MM_2 = M_1M_3$, et O est le milieu de $[MM_2]$ et de $[M_1M_3]$.

Ainsi, le quadrilatère $MM_1M_2M_3$ a ses deux diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu, donc $MM_1M_2M_3$ est un rectangle.



• La propriété 13 est connue sous le nom d'inégalité triangulaire.

Propriété 13

Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' ,

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes.

On appelle M, M' et S les images respectives de z, z' et $z + z'$ dans le plan complexe. Alors, d'après la propriété 10 : $OM = |z|$, $OM' = |z'|$ et $OS = |z + z'|$.

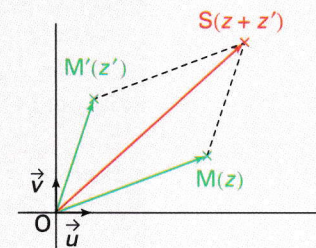
Dans le triangle OMS , on a : $OS \leq OM + MS$.

Or : $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM'}$, par définition de l'addition dans $\mathbb{C}$,

et : $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM'} \Leftrightarrow OMSM'$ est un parallélogramme
 $\Leftrightarrow \vec{OM'} = \vec{MS}$.

Donc : $MS = OM' = |z'|$.

D'où : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.



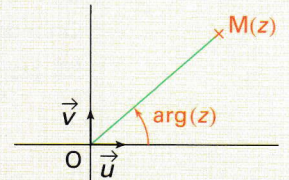
6 Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul

6.1 Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition 9

Soit z un nombre complexe **non nul** et M le point d'affixe z dans le plan complexe.

On appelle **argument de z** , et on note $\arg(z)$, une mesure en radian de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$.



Remarques :

1) 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

2) **Tout nombre complexe z non nul admet une infinité d'arguments** : si θ est un argument de z , alors pour tout entier relatif k , $\theta + 2k\pi$ est un argument de z .

On écrit : $\arg(z) = \theta [2\pi]$.

Exemples

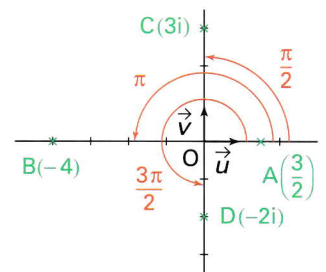
Soit A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives $\frac{3}{2}, -4, 3i, -2i$.

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OA}) = 0 [2\pi] ; \text{ donc } \arg\left(\frac{3}{2}\right) = 0 [2\pi].$$

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OB}) = \pi [2\pi] ; \text{ donc } \arg(-4) = \pi [2\pi].$$

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] ; \text{ donc } \arg(3i) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OD}) = \frac{3\pi}{2} [2\pi] ; \text{ donc } \arg(-2i) = \frac{3\pi}{2} [2\pi].$$



6.2 Définition d'une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété 14

Soit z un nombre complexe **non nul** de forme algébrique $a + ib$, avec a et b réels, et θ un argument de z .

Alors : $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

Démonstration

Soit M le point du plan d'affixe z .

Par définition, tout couple $(r ; \alpha)$ où $r = OM$ et $\alpha = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ est un couple de coordonnées polaires de M par rapport au pôle O et à l'axe polaire $(O ; \vec{u})$.

Or, par définition du module et d'un argument d'un nombre complexe non nul :

$$OM = |z| \text{ et } \theta = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) [2\pi].$$

Donc $(|z| ; \theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M .

On en déduit, d'après un résultat vu en classe de Première, que :

$$\overrightarrow{OM} = |z|(\cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}) = (|z| \cos \theta) \vec{u} + (|z| \sin \theta) \vec{v}.$$

Or M a pour affixe $z = a + ib$, donc par définition, $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

D'où, d'après l'unicité du couple des coordonnées cartésiennes d'un point dans un repère :

$$a = |z| \cos \theta \text{ et } b = |z| \sin \theta.$$

- Le théorème 4 se déduit immédiatement de la propriété 14.

- Tout nombre complexe non nul admet **une infinité de formes trigonométriques**.

- Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul équivaut à déterminer le module et un argument de z , ce qui équivaut aussi à déterminer un couple de coordonnées polaires du point M d'affixe z .

- Un nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques, mais une forme trigonométrique définit un et un seul nombre complexe non nul.

- Pour la détermination d'une forme trigonométrique de $-3\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$ et d'autres exemples de ce type :

VOIR EXERCICE RÉSOLU 1

Théorème 4

Tout nombre complexe z **non nul** peut s'écrire sous la forme :
 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ où θ est un argument de z .

Définition 10

Soit z un nombre complexe **non nul**.
 Une écriture de z sous la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ où θ est un argument de z est appelée **une forme trigonométrique** de z .

- **Remarque :** Soit z un nombre complexe non nul et M le point du plan complexe d'affixe z . z s'écrit de façon unique sous la forme $a + ib$ avec a et b réels : $a + ib$ est **la** forme algébrique de z et $(a ; b)$ est **le** couple de coordonnées cartésiennes de M .
 Si **une** forme trigonométrique de z est $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, alors $(|z| ; \theta)$ est **un** couple de coordonnées polaires de M et toute écriture du type $|z|[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)]$, où k est un entier relatif, est aussi une forme trigonométrique de z donc tout couple $(|z| ; \theta + 2k\pi)$, où k est un entier relatif, est un couple de coordonnées polaires de M .

Application 8

Énoncé : Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$.

Solution : Par définition, $z = \sqrt{5}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ est une forme trigonométrique de z .

$$\text{Or : } \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Donc : } z = \sqrt{5}\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + i \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Conclusion : La forme algébrique du nombre complexe de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ est $-\frac{\sqrt{5}}{2} + i \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Théorème 5

Soit z un nombre complexe **non nul**.
 Si z s'écrit sous la forme $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où r est un **réel strictement positif** et θ un réel, alors : $|z| = r$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.

Démonstration

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) ; \text{ donc : } |z| = |r| |\cos \theta + i \sin \theta| \text{ (propriété 12-(3)).}$$

$$\text{Or : } |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\text{Donc : } |z| = |r| = r \text{ car } r > 0.$$

$$\text{Soit } \alpha \text{ un argument de } z ; \text{ on peut donc écrire : } z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

$$\text{On a donc : } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

$$\text{ce qui donne : } \cos \theta + i \sin \theta = \cos \alpha + i \sin \alpha, \text{ car } r \neq 0.$$

$$\text{On en déduit, d'après le théorème 2, que : } \cos \theta = \cos \alpha \text{ et } \sin \theta = \sin \alpha, \text{ donc que : } \theta = \alpha [2\pi], \text{ ce qui prouve que } \theta \text{ est un argument de } z.$$

- **Remarque :** On a ainsi démontré que toute écriture du type $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où r est un réel strictement positif et θ un réel est une forme trigonométrique du nombre complexe de module r et dont θ est un argument. Par exemple, l'écriture $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et dont $\frac{\pi}{3}$ est un argument.
 Mais l'écriture $-3\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$ n'est une forme trigonométrique d'aucun nombre complexe.

- Deux nombres complexes sous forme algébrique sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et le même argument modulo 2π .

- On a donc :
(3') z réel $\Leftrightarrow z = 0$
ou $\arg(z) = 0 \text{ } [2\pi]$.
(4') z imaginaire pur $\Leftrightarrow z = 0$ ou
 $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$.

BAC

- Pour démontrer les énoncés (2), (3) et (4), on utilise respectivement les trois propriétés suivantes des angles orientés de deux vecteurs non nuls, vues en classe de Première :
– pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$ non nuls,
 $(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \text{ } [2\pi]$.
– pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$ non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ } [\pi]$.
– pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$ non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$.

Propriété 15

Soit z et z' deux nombres complexes **non nuls**.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z') \text{ } [2\pi].$$

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

- Il est immédiat que si $z = z'$, alors $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') \text{ } [2\pi]$.
- Réciproquement, on suppose que $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') \text{ } [2\pi]$.

Soit θ un argument de z et θ' un argument de z' .

Alors on peut écrire : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

Or : $|z| = |z'|$,

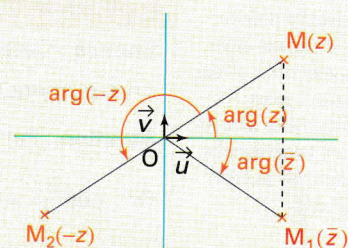
et $\theta = \theta' \text{ } [2\pi]$, donc : $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$.

On en déduit que : $|z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$, c'est-à-dire $z = z'$.

6.3 Propriétés des arguments**Propriétés 16**

Pour tout nombre complexe z **non nul** :

- (1) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \text{ } [2\pi]$.
- (2) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \text{ } [2\pi]$.
- (3) z est réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 \text{ } [\pi]$.
- (4) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$.

**Démonstration**

Soit z un nombre complexe non nul, $z = a + ib$ avec a et b réels non simultanément nuls.

On note M , M_1 et M_2 les images respectives de z , $\bar{z}$ et $-z$ dans le plan complexe muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Alors :

$$\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \text{ } [2\pi], \quad \arg(\bar{z}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) \text{ } [2\pi] \text{ et } \arg(-z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM_2}) \text{ } [2\pi].$$

- (1) D'après la propriété 6, M et M_1 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; donc : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \text{ } [2\pi]$, c'est-à-dire $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \text{ } [2\pi]$.

- (2) Dans le plan complexe muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

M a pour affixe z , donc : $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$;

M_2 a pour affixe $-z$, donc : $\overrightarrow{OM_2} = -a\vec{u} - b\vec{v}$.

$$\text{Donc : } (\vec{u}; \overrightarrow{OM_2}) = (\vec{u}; -\overrightarrow{OM}) \text{ } [2\pi]$$

$$= (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) + \pi \text{ } [2\pi], \text{ c'est-à-dire : } \arg(-z) = \arg(z) + \pi \text{ } [2\pi].$$

- (3) z réel et $z \neq 0 \Leftrightarrow M$ appartient à l'axe des abscisses et $M \neq O$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OM} \text{ colinéaires et } \overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = 0 \text{ } [\pi] \text{ et } \overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z) = 0 \text{ } [\pi] \text{ et } z \neq 0.$$

- (4) z imaginaire pur et $z \neq 0 \Leftrightarrow M$ appartient à l'axe des ordonnées et $M \neq O$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OM} \text{ orthogonaux et } \overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi].$$

• La propriété 17 est la **propriété fondamentale des arguments**.

BAC

Propriété 17

Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' **non nuls** :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi].$$

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

On peut écrire :

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ où θ est un argument de z ,

et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$ où θ' est un argument de z' .

Alors : $zz' = |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

Or :

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') &= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i^2\sin\theta\sin\theta' \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \text{ d'après les formules d'addition.} \end{aligned}$$

Donc : $zz' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$.

$|z||z'| > 0$, donc d'après le théorème 5 : $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \theta + \theta' \quad [2\pi]$,

c'est-à-dire : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$.

• On retrouve ici la propriété 12-(3).

VOIR ACTIVITÉ 2

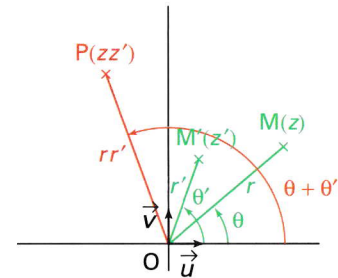
Remarque : On peut ainsi donner une interprétation géométrique, dans le plan complexe, du produit de deux nombres complexes z et z' non nuls.

Soit M , M' et P les images respectives de z , z' et zz' dans le plan complexe.

$$|zz'| = |z||z'| \Leftrightarrow OP = OM \times OM'$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{OP}) = (\vec{u}; \vec{OM}) + (\vec{u}; \vec{OM'}) \quad [2\pi].$$



Propriétés 18

Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe z' **non nuls** :

$$(1) \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi].$$

$$(2) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi].$$

$$(3) \text{ pour tout entier relatif } n, \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi].$$

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$(1) z \times \frac{1}{z} = 1.$$

$$\text{Or : } \arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \quad [2\pi] \text{ d'après la propriété 17}$$

$$\text{et } \arg(1) = 0 \quad [2\pi] \text{ car } 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

$$\text{Donc : } \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \quad [2\pi], \text{ ce qui donne : } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi].$$

$$(2) \frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) &= \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \quad [2\pi], \text{ d'après la propriété 17} \\ &= \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi], \text{ d'après la propriété (1).} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi].$$

BAC

(3) On démontre d'abord facilement par récurrence sur n que :
pour tout nombre complexe z non nul et tout entier naturel n ,
 $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$.

– Soit z un nombre complexe non nul et n un entier relatif strictement négatif.
Alors : $n = -m$ avec m entier naturel.

$$\text{Donc : } z^n = z^{-m} = \frac{1}{z^m}.$$

On en déduit que : $\arg(z^n) = -\arg(z^m) [2\pi]$, d'après la propriété (1).

Or : $\arg(z^m) = m \arg(z) [2\pi]$, car $m \in \mathbb{N}$.

Donc : $\arg(z^n) = -m \arg(z) [2\pi]$,
c'est-à-dire : $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$.

– Conclusion :

Pour tout nombre complexe z non nul et tout entier relatif, $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$.

Application 9

Énoncé : Déterminer une forme trigonométrique de $\frac{1}{1+i}$.

Solution :

– On commence par déterminer une forme trigonométrique de $1+i$.

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Donc } 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

– On utilise les propriétés des modules et des arguments.

$$|1+i| = \sqrt{2}; \text{ donc : } \left| \frac{1}{1+i} \right| = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (propriété 12-(4)).}$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]; \text{ donc : } \arg\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ (propriété 18-(1)).}$$

Conclusion : $\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$ est une forme trigonométrique de $\frac{1}{1+i}$.

Application 10

Énoncé : Déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$.

Solution : On pose : $z = 1+i$ et $z' = \frac{\sqrt{3}+i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$.

– On commence par déterminer une forme trigonométrique de z et de z' .

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ (voir l'application 1).}$$

$$|z'| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc : } z' = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

– On utilise les propriétés des modules et des arguments.

$$|zz'| = |z||z'| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ (propriété 12-(3))}$$

$$\text{et } \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi] \text{ (propriété 17)}$$

$$\text{donc : } \arg(zz') = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$= \frac{5\pi}{12} [2\pi].$$

Conclusion : $\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$ est une forme trigonométrique de $(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$.

7 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

On a démontré (propriété 17) que : pour tout réel θ et tout réel θ' ,
 $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$.

Ainsi, en posant : pour tout réel θ , $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$,

on a : $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$ pour tout réel θ et tout réel θ' .

Or, on a vu que la relation fonctionnelle : pour tout réel x et tout réel y ,
 $f(x + y) = f(x) \times f(y)$ caractérise les fonctions exponentielles $x \mapsto e^{kx}$.

C'est ce qui justifie l'introduction de **la notation exponentielle**.

• $e^{i\theta}$ se lit :
« exponentielle
i theta ».

Définition 11

Pour tout réel θ , on pose : $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$.

Autrement dit : on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et dont θ est un argument.

Exemples

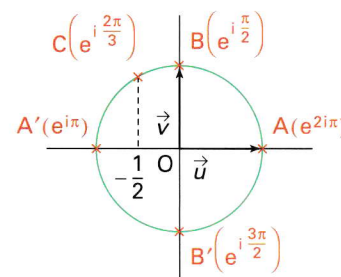
$$e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1.$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



• Les propriétés 19 se déduisent immédiatement des propriétés 12, 17 et 18.

Propriétés 19

Pour tout réel θ et tout réel θ' :

$$(1) e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}.$$

$$(2) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

$$(3) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}.$$

$$(4) \text{ pour tout entier relatif } n, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

• Le théorème 6 est une conséquence immédiate du théorème 4 et de la définition 11.

Théorème 6

Tout nombre complexe **non nul** peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z|e^{i\theta} \text{ où } \theta \text{ est un argument de } z.$$

Définition 12

Soit z un nombre complexe **non nul**.

Une écriture de z sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$ où θ est un argument de z est appelée **une forme exponentielle** de z .

VOIR EXERCICE
RÉSOLU 5

• **Remarque** : L'intérêt des formes exponentielles est qu'elles permettent de simplifier les calculs puisque, on l'a vu dans le chapitre 3 et on le voit ici avec les propriétés 19, on calcule avec cette notation exponentielle comme avec les puissances.

• Le théorème 7 se déduit immédiatement du théorème 5 et de la définition 11.

Théorème 7

Soit z un nombre complexe non nul.

Si z s'écrit sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un réel **strictement positif** et θ un réel, alors : $|z| = r$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.

Autrement dit : toute écriture du type $re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel est une forme exponentielle du nombre complexe de module r et dont θ est un argument.

Remarque : Une écriture du type $re^{i\theta}$ avec r réel strictement négatif n'est une forme exponentielle d'aucun nombre complexe.

Application 11

Énoncé : Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Solution : $-3e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une forme exponentielle d'un nombre complexe car $-3 < 0$.

Mais on peut écrire : $-1 = e^{i\pi}$; d'où : $z = 3 \times e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} = 3e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$3 > 0$, donc $3e^{i\frac{4\pi}{3}}$ est une forme exponentielle de z .

Conclusion : $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{4\pi}{3} [2\pi]$.

• Les propriétés 20 se déduisent immédiatement des propriétés 12 et 19.

Propriétés 20

Pour tout réel r et tout réel r' strictement positifs, pour tout réel θ et tout réel θ' :

$$(1) re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}. \quad (2) \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}. \quad (3) \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}.$$

(4) pour tout entier relatif n , $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

8 Nombres complexes et géométrie

Dans toute cette partie, on considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

8.1 Applications immédiates

Propriétés 21

Soit A, B, C, D quatre points du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D , tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

$$(1) AB = |z_B - z_A| \text{ et } (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

$$(2) \frac{CD}{AB} = \left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

BAC

Démonstration

(1) D'après la propriété 5, $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Donc, d'après la propriété 10-(2) : $AB = |z_B - z_A|$.

Soit M le point du plan complexe tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Alors M a pour affixe $z_B - z_A$; donc : $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.

- On utilise ici successivement deux propriétés des angles orientés de deux vecteurs non nuls, vues en classe de Première :
– la relation de Chasles ;
– pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,
 $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v})$ [2 π].

- Pour d'autres exemples d'application des propriétés 21 :
VOIR EXERCICE RÉSOLU 3

- La démonstration de la propriété 22 est immédiate.

Or : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ [2 π]. D'où : $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ [2 π].

(2) D'après la propriété 5, $z_D - z_C$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$ et $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$; donc, d'après la propriété 10-(2) : $CD = |z_D - z_C|$ et $AB = |z_B - z_A|$.

D'où : $\frac{CD}{AB} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right|$ d'après la propriété 12-(5).

De plus : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD})$ [2 π]
 $= -(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD})$ [2 π]
 $= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C)$ [2 π], d'après la propriété (1)
 $= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ [2 π], d'après la propriété 18-(2).

Application 12

Énoncé : Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives z_A , z_B , z_C , tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

1) Démontrer que :

a) A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.

b) ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

c) A appartient à la médiatrice Δ de [BC] $\Leftrightarrow \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$.

2) Soit r un réel positif strictement et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r .

Démontrer que le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z telle que $z = z_A + re^{i\theta}$, lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

Solution :

1) a) A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$ [π]

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ } [\pi], \text{ d'après la propriété 21-(2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est réel, d'après la propriété 16-(3).}$$

b) ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ [π]

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi], \text{ d'après la propriété 21-(2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est imaginaire pur,}$$

d'après la propriété 16-(4).

c) $A \in \Delta \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$, d'après la propriété 21-(2).

2) Soit M un point du plan complexe et z son affixe.

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow |z - z_A| = r$, d'après la propriété 10-(1)

$\Leftrightarrow$ il existe un réel θ tel que $z - z_A = re^{i\theta}$, d'après le théorème 6

$\Leftrightarrow$ il existe un réel θ tel que $z = z_A + re^{i\theta}$.

Propriété 22

Soit A, B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A , z_B , et α , β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le barycentre G des deux points pondérés (A, α) et (B, β) a pour affixe :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}.$$

• **Rappels :**

- Le milieu d'un segment $[AB]$ est l'isobarycentre des points A et B .
- Le centre de gravité d'un triangle ABC est l'isobarycentre des points A , B , C .

• **Remarques :**

1) En particulier, $A(z_A)$ et $B(z_B)$ étant deux points du plan complexe, le **milieu** I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

2) On peut généraliser la propriété 22 au cas du barycentre de trois points pondérés :

Le barycentre G des points pondérés $(A(z_A), \alpha)$, $(B(z_B), \beta)$ et $(C(z_C), \gamma)$, avec

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0, \text{ a pour affixe } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

En particulier : A, B, C étant trois points non alignés du plan complexe, le **centre de gravité** G du triangle ABC a pour affixe $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

8.2 Écriture complexe d'une transformation du plan

- La démonstration de la propriété 23 est immédiate.

Propriété 23

Soit M et M' deux points du plan complexe, d'affixes respectives z et z' , et $\vec{w}$ un vecteur du plan complexe, d'affixe $z_{\vec{w}}$.

M' est l'image de M par la translation $\vec{w}$ si et seulement si $z' = z + z_{\vec{w}}$.

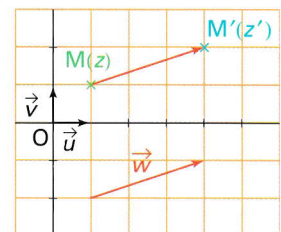
Définition 13

L'expression $z' = z + z_{\vec{w}}$ est appelée **l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $z_{\vec{w}}$** .

- La relation $z' = z + z_{\vec{w}}$ caractérise la translation de vecteur $\vec{w}(z_{\vec{w}})$.

Exemple

$z' = z + 3 + i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $3 + i$.



- La démonstration de la propriété 24 est immédiate.

Propriété 24

Soit M et M' deux points du plan complexe, d'affixes respectives z et z' , Ω un point du plan complexe, d'affixe ω , et k un réel non nul.

M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si $z' - \omega = k(z - \omega)$.

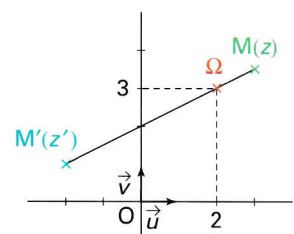
Définition 14

L'expression $z' = k(z - \omega) + \omega$ est appelée **l'écriture complexe de l'homothétie de centre le point Ω d'affixe ω et de rapport k non nul**.

- La relation $z' = k(z - \omega) + \omega$ caractérise l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k .

Exemple

$z' = -3(z - 2 - 3i) + 2 + 3i$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(2 + 3i)$ et de rapport -3 . En effet : $z' = -3(z - 2 - 3i) + 2 + 3i \Leftrightarrow z' - (2 + 3i) = -3[z - (2 + 3i)]$.



Propriété 25

Soit M et M' deux points du plan complexe, d'affixes respectives z et z' , Ω un point d'affixe ω et θ un réel.

M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Démonstration

Avec les notations de la propriété, on désigne par r la rotation de centre Ω et d'angle θ .

$$M \neq \Omega \text{ et } M' = r(M) \Leftrightarrow M \neq \Omega, \Omega M' = \Omega M \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow M \neq \Omega, \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow z \neq \omega, \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad [2\pi],$$

d'après la propriété 21-(2)

$$\Leftrightarrow z \neq \omega, \text{ et } \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z \neq \omega, \text{ et } z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

De plus : $z' - \omega = 0 \Leftrightarrow z - \omega = 0$.

Donc l'expression $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est encore valable lorsque $M = \Omega$. Elle est donc bien équivalente à $M' = r(M)$ pour tout point M du plan complexe.

La relation $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ caractérise la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ .

• Pour un exemple d'application des propriétés 23 à 25 :
VOIR EXERCICE RÉSOLU 4

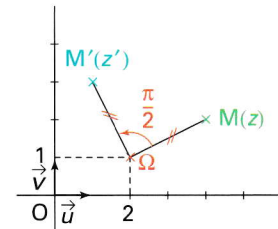
Définition 15

L'expression $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ est appelée **l'écriture complexe de la rotation de centre le point Ω d'affixe ω et d'angle θ** .

Exemple

$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 2 - i) + 2 + i$ est l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(2 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En effet :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 2 - i) + 2 + i \Leftrightarrow z' - (2 + i) = e^{i\frac{\pi}{2}}[z - (2 + i)].$$

**Remarques :**

1) L'identité du plan est la translation de vecteur $\vec{0}$ ou une homothétie de rapport 1 et de centre Ω quelconque ou une rotation de centre Ω quelconque et d'angle nul.

Son écriture complexe est $z' = z$, obtenue en prenant respectivement $\vec{v} = \vec{0}$, $k = 1$, $\theta = 0$ dans l'écriture complexe respectivement d'une translation de vecteur $\vec{v}$, d'une homothétie de centre quelconque et de rapport k , d'une rotation de centre quelconque et d'angle θ .

2) L'écriture complexe d'une homothétie de centre O et de rapport k non nul est $z' = kz$. Ainsi, multiplier un nombre complexe z par un réel k non nul signifie géométriquement transformer le point M d'affixe z par l'homothétie de centre O et de rapport k .

3) L'écriture complexe d'une rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$. Ainsi, multiplier un nombre complexe z par un nombre complexe de module 1 et d'argument θ signifie géométriquement transformer le point M d'affixe z par la rotation de centre O et d'angle θ .

4) Multiplier un nombre complexe z_1 par un nombre complexe $z_2 = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel signifie géométriquement transformer le point M_1 d'affixe z_1 par la composée de l'homothétie de centre O et de rapport r et de la rotation de centre O et d'angle θ dans un ordre quelconque.

1 Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Énoncé

Déterminer, dans chaque cas, une forme trigonométrique du nombre complexe z .

- 1 $z = 2 - 2i$.
- 2 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où r et θ sont deux réels, avec $r \neq 0$.
- 3 $z = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ où r et θ sont deux réels, avec $r > 0$.
- 4 $z = r(\sin \theta + i \cos \theta)$ où r et θ sont deux réels, avec $r > 0$.

Solution commentée

Pour déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul, il est indispensable de connaître par cœur les valeurs trigonométriques remarquables (cosinus et sinus de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$) ainsi que celles des angles associés ($\pi - \theta, \pi + \theta, -\theta$) et de $\frac{\pi}{2} - \theta$ et $\frac{\pi}{2} + \theta$. Pour les retrouver, on peut toujours s'aider d'un cercle trigonométrique.

1 Pour déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul donné sous sa forme algébrique :

– on détermine d'abord le module de z :

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$$

– on factorise ensuite la forme algébrique de z par $|z|$:

$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

– on détermine enfin un argument de z en utilisant les valeurs remarquables :

$$\theta \text{ est un argument de } z \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi].$$

Conclusion : L'écriture $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ est une forme trigonométrique du nombre complexe $z = 2 - 2i$.

2 D'après le cours, si r est un réel strictement positif, alors l'écriture $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe z , avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta [2\pi]$.

– Si r est un réel strictement négatif, alors l'écriture $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ n'est pas une forme trigonométrique du nombre complexe z .

Première méthode On utilise les angles associés.

On peut écrire : $z = -r(-\cos \theta - i \sin \theta) = -r[(-\cos \theta) + i(-\sin \theta)]$.

Or : pour tout réel θ , $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

$$\text{et } \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta.$$

Donc : $z = -r[\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]$ avec $-r > 0$.

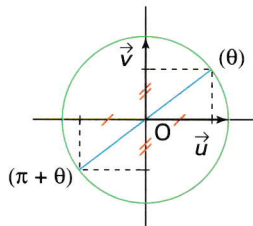
On en déduit que $-r[\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]$ est une forme trigonométrique de z .

Autrement dit : si $r < 0$, alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est le nombre complexe de module $-r$ et dont $\pi + \theta$ est un argument.

Deuxième méthode On utilise une propriété des modules et des arguments.

On peut écrire : $z = -r(-\cos \theta - i \sin \theta)$ avec $-r > 0$.

Donc : $-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $-r > 0$.



► Définition 8

► Théorème 5

► Théorème 5

On en déduit que $-r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique de $-z$, donc que : $-r = |-z|$ et $\theta = \arg(-z) [2\pi]$.

Or : $|z| = |-z|$

et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$.

Donc : $|z| = -r$ et $\arg(z) = \theta - \pi [2\pi]$ ou encore $\arg(z) = \theta + \pi [2\pi]$.

On en déduit qu'une forme trigonométrique de z est :

$$z = -r[\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)].$$

Conclusion :

– Si $r > 0$, alors l'écriture $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique de z .

– Si $r < 0$, alors l'écriture $-r[\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]$ est une forme trigonométrique de $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

❸ L'écriture $r(\cos \theta - i \sin \theta)$ où r et θ sont deux réels, r étant strictement positif, n'est pas une forme trigonométrique du nombre complexe z car $\cos \theta - i \sin \theta$ n'est pas de la forme $\cos \alpha + i \sin \alpha$.

Première méthode On utilise les angles associés.

On peut écrire : $z = r[\cos \theta + i(-\sin \theta)]$.

Or : pour tout réel θ , $\cos(-\theta) = \cos \theta$

$$\text{et } \sin(-\theta) = -\sin \theta.$$

Donc : $z = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$ avec $r > 0$.

On en déduit que $r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$ est une forme trigonométrique de z .

Autrement dit : si $r > 0$, alors $z = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ est le nombre complexe de module r et dont $-\theta$ est un argument.

Deuxième méthode On utilise une propriété des modules et des arguments.

On remarque que : $\bar{z} = \overline{r(\cos \theta - i \sin \theta)} = \bar{r}(\overline{\cos \theta - i \sin \theta})$.

Or : $\bar{r} = r$ car r est réel

$$\text{et } \overline{\cos \theta - i \sin \theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Donc : $\bar{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$.

On en déduit que $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique de $\bar{z}$, donc que : $r = |\bar{z}|$ et $\theta = \arg(\bar{z}) [2\pi]$.

Or : $|z| = |\bar{z}|$

$$\text{et } \arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi].$$

Donc : $|z| = r$ et $\arg(z) = -\theta [2\pi]$.

On en déduit qu'une forme trigonométrique de z est : $r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$.

Conclusion : L'écriture $r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$, avec $r > 0$, est une forme trigonométrique de $z = r(\cos \theta - i \sin \theta)$.

❹ L'écriture $r(\sin \theta + i \cos \theta)$ où r et θ sont deux réels, r étant strictement positif, n'est pas une forme trigonométrique du nombre complexe z car $\sin \theta + i \cos \theta$ n'est pas de la forme $\cos \alpha + i \sin \alpha$.

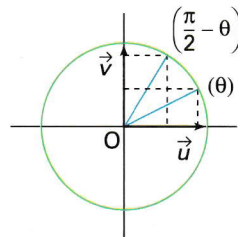
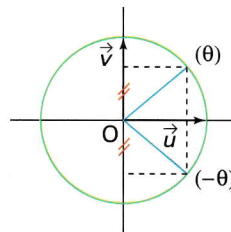
On sait que deux angles complémentaires « échangent » leurs cosinus et leurs sinus.

$$\text{Or : pour tout réel } \theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\text{et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta.$$

$$\text{Donc : } z = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] \text{ avec } r > 0.$$

On en déduit que $r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ est une forme trigonométrique de z .



► Théorème 5

► Propriété 12-(2)

► Propriété 16-(2)

► Théorème 4

► Théorème 5

► Propriété 9-(2)

► Propriété 8-(2)

► Définition 7

► Propriété 12-(2)

► Propriété 16-(1)

► Théorème 4

Autrement dit : si $r > 0$, alors $z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$ est le nombre complexe de module r et dont $\frac{\pi}{2} - \theta$ est un argument.

Conclusion : L'écriture $r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$, avec $r > 0$ est une forme trigonométrique de $z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$.

2 Déterminer un lieu géométrique dans le plan complexe

Énoncé Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose : $z' = \frac{z+1}{z-1}$.

① Démontrer que : $|z| = 1 \Leftrightarrow z'$ imaginaire pur.

② Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Déduire de la question précédente le lieu géométrique des points M' d'affixe z' lorsque le point M d'affixe z décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 privé du point A d'affixe 1.

Solution commentée

① On utilise la caractérisation d'un imaginaire pur par le conjugué.

$$z' \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \bar{z}' = -z' \Leftrightarrow z' + \bar{z}' = 0.$$

On exprime $\bar{z}'$ en fonction de $\bar{z}$ en utilisant les propriétés des conjugués.

$$\text{Or : } \bar{z}' = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}.$$

$$\text{Or : } \bar{1} = 1 \text{ car } 1 \text{ est réel.}$$

$$\text{Donc : } \bar{z}' = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}, \text{ et } \bar{z}' \text{ est bien défini car : } \bar{z} \neq 1 \Leftrightarrow z \neq 1.$$

D'où :

$$z' + \bar{z}' = 0 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+1)(\bar{z}-1) + (\bar{z}+1)(z-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z\bar{z} - z + \bar{z} - 1 + \bar{z}z - \bar{z} + z - 1}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z\bar{z} - 2}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0, \text{ car } z\bar{z} = \bar{z}z$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(z\bar{z} - 1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Conclusion : z' imaginaire pur $\Leftrightarrow |z| = 1$.

② On détermine une caractérisation de l'affixe z d'un point M du cercle $\mathcal{C}$ privé du point A , c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M appartienne au cercle $\mathcal{C}$ privé de A .

Soit M un point du plan complexe d'affixe z .

$$M \in \mathcal{C} \text{ et } M \neq A \Leftrightarrow OM = 1 \text{ et } M \neq A \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } z \neq 1.$$

Or, d'après la question précédente : $|z| = 1$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow z'$ imaginaire pur.

Or : z' imaginaire pur $\Leftrightarrow M'$ d'affixe z' appartient à l'axe des ordonnées.

Conclusion : Lorsque le point M d'affixe z décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé de A , l'ensemble des points M' d'affixe $\frac{z+1}{z-1}$ est l'axe des ordonnées.

► Propriété 8-(3)

► Propriétés 9-(4) et 9-(1)

► Propriété 8-(2)

► Propriété 11

► Propriété 10

74 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

- 1) $|z - 2| = 3$.
- 2) $|z + i| = 1$.
- 3) $|z - 1| = |z + 2i|$.
- 4) $|z| = |2 + z|$.
- 5) $|\bar{z} + i| = \sqrt{2}$.
- 6) $|z - 3i| = |\bar{z} + 1|$.
- 7) $|z + 4i + iz| = 1$.
- 8) $|\bar{z} - 1 + i| = 2$.

75 À tout nombre complexe z , $z \neq 2i$, on associe le nombre complexe : $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

Déterminer, dans le plan complexe :

- 1) l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M d'affixe z tels que Z est imaginaire pur.
- 2) l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M d'affixe z tels que Z est réel.
- 3) l'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points M d'affixe z tels que $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

76 Soit M un point du plan complexe d'affixe z , $z \neq 4$, $z = x + iy$ avec x et y réels, et M' le point du plan complexe d'affixe $z' = \frac{iz-4}{z-4}$, associé à M.

- 1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .
- 2) Déterminer, dans le plan complexe :
 - a) l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que le point M' associé à M appartient à l'axe des réels.
 - b) l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que le point M' associé à M appartient à l'axe des imaginaires purs.

77 QCM

Pour chaque question, indiquer la (les) réponse(s) exacte(s). **On justifiera la réponse.**

Attention, il peut n'y avoir aucune réponse exacte.

1 Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$, avec x et y réels, vérifiant $|z - 1| = |z + i|$ est la droite d'équation :

- a) $y = x - 1$.
- b) $y = -x$.
- c) $y = -x + 1$.
- d) $y = x$.

2 Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives i et $\sqrt{3}$. L'affixe du point C tel que ABC est un triangle équilatéral direct est :

- a) $-i$.
- b) $2i$.
- c) $\sqrt{3} + i$.
- d) $\sqrt{3} + 2i$.

3 Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$, avec x et y réels, vérifiant la relation $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ est inclus dans :

- a) la droite d'équation $y = -x$.
- b) le cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.
- c) la droite d'équation $y = x$.
- d) le cercle de diamètre $[AB]$, où A et B sont les points d'affixes respectives -2 et $2i$.

Je m'entraîne seul(e)

78 Soit I et A les points du plan complexe d'affixes respectives 1 et -2 . On appelle K le milieu du segment $[IA]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[IA]$.

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

On prendra 2 cm pour unité graphique.

2) Soit B le point d'affixe $b = \frac{1+4i}{1-2i}$.

Écrire b sous sa forme algébrique et démontrer que le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$.

3) Soit D le point de $\mathcal{C}$ tel que : $(\vec{KI} ; \vec{KD}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On note d l'affixe de D.

a) Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$?

Donner un argument de $d + \frac{1}{2}$.

b) En déduire que : $d = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4}$.

79 Soit A, B, C, D, E les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = 2; \quad z_B = -1 + i; \quad z_C = -i;$$

$$z_D = i\sqrt{3}; \quad z_E = -4 + 3i\sqrt{3}.$$

1) Faire une figure et placer les cinq points.

2) a) Déterminer un argument de $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

3) Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

80 Soit A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = i; \quad z_B = -i; \quad z_C = -\sqrt{3} + 2i;$$

$$z_D = -\sqrt{3} - 2i.$$

Démontrer que les quatre points appartiennent au cercle de diamètre $[CD]$.

81 Soit A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i; \quad z_B = 3 + 5i; \quad z_C = 2 + 7i.$$

1) Déterminer le barycentre G des points pondérés (A, 1), (B, 1) et (C, 2).

2) Déterminer une équation de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan complexe tels que :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|.$$

82 À tout nombre complexe z , $z \neq 3$, on associe le nombre complexe : $Z = \frac{z+2i}{z-3}$.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z vérifie la condition donnée.

- 1) Z est réel.
- 2) Z est imaginaire pur.
- 3) $|Z| = 1$.

83 Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et i dans le plan complexe.

BAC

À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe $Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1) a) Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe -i.

b) Placer les points A, B, C et C'.

On prendra 4 cm pour unité graphique.

2) Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux réels.

a) Démontrer l'égalité :

$$Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}.$$

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z est réel.

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Re}(Z)$ est négatif ou nul.

3) a) Écrire le nombre complexe $1 - i$ sous forme trigonométrique.

b) Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Démontrer que le nombre complexe $\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$ est un réel non nul si, et seulement si, il existe un entier k tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

c) En déduire l'ensemble des points du plan complexe M tels que : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} [\pi]$.

d) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

84 Soit A le point d'affixe i, B le point

BAC

d'affixe -i et f la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{i\}$ par :

$$f(z) = \frac{1-iz}{z-i}.$$

1) Vérifier que : pour tout z appartenant à $\mathbb{C} - \{i\}$,

$$f(z) = -i + \frac{2}{z-i}.$$

2) a) Démontrer que -i n'a pas d'antécédent par f.

b) Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.

3) À tout point M distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = f(z)$.

a) Démontrer que :

pour tout point M distinct de A, $AM \times BM' = 2$.

b) Démontrer que lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle $\mathcal{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

4) a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M(z) tels que $z - i$ est un réel non nul.

b) Démontrer que lorsque M décrit $\mathcal{E}$, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.

c) Lorsque M décrit $\mathcal{E}$, M' décrit-il toute la droite Δ ?

5) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $f(z)$ est un imaginaire pur non nul.

► Corrigés page 447

Pour approfondir

85 Soit a, b, c trois nombres complexes, deux à deux distincts, tels que $|a| = |b| = |c|$, et A, B, C les images respectives de a, b, c dans le plan complexe. On note H le point d'affixe $a + b + c$.

1) On pose : $w = \bar{b}c - b\bar{c}$.

a) Démontrer que w est imaginaire pur.

b) En déduire que $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-\bar{c}}$ sont imaginaires purs.

2) a) Exprimer, en fonction de a, b, c, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$, et en déduire que (AH) est une hauteur du triangle ABC.

b) Justifier que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3) Faire une figure en prenant 4 cm pour unité graphique, avec :

$$a = \sqrt{3} + i; \quad b = -1 + i\sqrt{3}; \quad c = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Propriété de l'angle inscrit

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété de l'angle inscrit :

soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω , A et B deux points de $\mathcal{C}$ distincts et M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B ; alors :

$$2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}) [2\pi] \quad (1).$$

1) Démontrer qu'on peut choisir comme repère orthonormé direct du plan complexe un repère d'origine Ω dont l'unité de longueur est le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

2) On note a, b, z les affixes respectives des points A, B, M dans le repère d'origine Ω choisi dans la question précédente.

Traduire l'égalité (1) en utilisant a, b, z.

3) Démontrer l'égalité (1).

87 1) Soit A, B, C trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives a, b, c.

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en A s'écrit :

$$\frac{b-a}{c-a} + \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}} = 0.$$

2) Soit M un point du plan complexe et z son affixe. On note M' et M'' les points d'affixes respectives z^2 et z^3 .

a) Quelles conditions nécessaires et suffisantes doit vérifier z pour que les points M, M' et M'' soient distincts ?

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan complexe tels que le triangle MM'M'' est rectangle en M ou en M' ou en M''.

c) Représenter graphiquement $\mathcal{E}$.

88 Dans le plan orienté, on considère

BAC

les points Ω et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[\Omega A]$, un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des points Ω et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKL Ω .