

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. Sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, f est composée de fonctions usuelles (exponentielle et inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas) continues (et même de classe $\mathcal{C}^1$) donc elle même continue. Le problème est au point de raccordement. Observons que, pour $x \neq 0$,

$$-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

et par composition avec l'exponentielle dont la limite en $-\infty$ vaut 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

- b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Comme mentionné ci-avant f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

par croissance comparée. Par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut donc affirmer que f est finalement de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$) et que $f'(0) = 0$. $\square$

- c. Achever l'étude des variations de f , dresser son tableau de variations incluant ses limites (justifiées) aux infinis.

Solution. Observons que f est paire. On a $-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc par composition avec l'exponentielle $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et la limite est la même en $-\infty$ par parité. Le signe de la dérivée s'obtient aussi de manière immédiate, ce qui permet de dresser le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
f	1	0	1

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1[$.

Solution. On procède par récurrence. Commençons par observer que, d'après l'étude de f ci-avant, $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$ et on peut même préciser que, comme f est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$, f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]0, f(1)[=]0, e^{-1}[$. De plus, f ne s'annule qu'en 0.

✗ initialisation. Pour $n = 1$, on a $u_1 = f(3) = e^{-1/9} \in]0, 1[$ donc la propriété est vraie au rang 1.

✗ hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_n \in]0, 1[$. Montrons qu'alors $u_{n+1} \in]0, 1[$. En effet,

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f(]0, 1[) \subset]0, 1[$$

d'après les remarques qui précèdent. La récurrence est terminée. $\square$

- b. Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Calculer $g''(x)$. Montrer que g réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

On admettra que $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 1$.

Solution. La fonction g est dérivable deux fois sur $]0, 1[$ comme somme de deux telles fonctions (on a déjà dit que f était $\mathcal{C}^1$ mais en fait elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ pour les mêmes raisons que celles évoquées). On a, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 1, \quad \text{puis} \quad g''(x) = f''(x) = \frac{4 - 6x^2}{x^6} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme, $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 1$, il suit que, pour tout $x \in]0, 1[$, $g'(x) < 0$. On a alors les tableaux de variations en cascade suivants

x	0	$\sqrt{2/3}$	1
$g''(x)$		0	
g'	−1	$g'(\sqrt{2/3}) < 0$	$g'(1)$
$g'(x)$		−	
g	0		$e^{-1} - 1$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$, elle réalise donc (par le théorème de la bijection monotone) une bijection de $[0, 1]$ sur $[e^{-1} - 1, 0]$. $\square$

c. En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n \in]0, 1[$, alors $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante pour $n \geq 1$. Étant minorée par 0, elle est donc convergence vers une certaine limite $\ell \geq 0$ par théorème de convergence monotone. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en ℓ), la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, par passage à la limite $\ell = f(\ell)$ ou encore $g(\ell) = 0$. De l'étude qui précède, le seul antécédent de 0 par g est 0 et donc $\ell = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0. □

3. a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Solution. Mêmes arguments que précédemment : on cite les théorèmes généraux (composées de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$). Ce n'est pas là qu'est le problème... □

b. Montrer par récurrence qu'il existe une suite de polynômes (P_n) , telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x).$$

On précisera les expressions de P_1 et P_2 ainsi que la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .

Solution. On procède donc comme suggéré par récurrence.

✂ initialisation. Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{P_0(x)}{x^0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

où on a posé $P_0 = 1$, ce qui permet donc d'initialiser la propriété.

✂ hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Alors, comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}$ est dérivable et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{P'_n(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \times \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{P'_n(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{P'_n(x)x^3 - 3nx^2P_n(x) + 2P_n}{x^{3n+3}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{P'_n(x)x^3 + (2 - 3nx^2)P_n(x)}{x^{3n+3}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

où on a posé $P_{n+1} = X^3P'_n + (2 - 3nX^2)P_n$ qui est bien un polynôme. La récurrence est terminée. □

c. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, , $P_n(0) = 2^n$.

Solution. C'est encore une récurrence...

✂ initialisation. Pour $n = 0$, on a $P_0(0) = 1 = 2^0$ et c'est vérifié.

✂ hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n(0) = 2^n$. Alors

$$P_{n+1}(2) = 0^3P'_n(0) + (2 - 3n \times 0^2)P_n(0) = 2P_n(0) \underset{\text{H.R.}}{=} 2 \times 2^n = 2^{n+1},$$

ce qui est bien le résultat attendu et termine la récurrence.

d. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Solution. Soit $n \in *$. On a

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x) = P_n(x) \times \frac{1}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée et algèbre des limites car $P_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 2^n$.

e. Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

□

Solution. On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0, c'est à dire de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ en 0 et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est (encore) une récurrence. Il n'est en revanche pas nécessaire de l'initialiser car on a déjà montré en début d'exercice que f était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f^{(n+1)}(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ par ce qui précède, le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ appliqué à $f^{(n)}$ nous assure que $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$) et f est bien de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. La récurrence est terminée. □

4. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre n , pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Que remarque-t-on ?

Solution. Par la formule de Taylor-Young, f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = o(x^n)$$

car toutes les dérivées successives de f sont nulles en 0.

On obtient alors une fonction dont la partie principale du développement limité à tout ordre est nulle. Pourtant f n'est pas identiquement nulle. □

Exercice 3

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

On note 0 l'endomorphisme nul de E et Id l'endomorphisme identité.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et f endomorphisme de E , on définit par récurrence l'endomorphisme f^n par : $f^0 = \text{Id}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$. Notons qu'alors, pour tout entier $p \geq n$, on a $f^p = 0$.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

Partie I : Deux exemples

1. Dans cette question (et celle là seulement), on prend $E = \mathbb{K}^3$ et pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ on pose

$$\varphi(u) = (-2x + y, -3x + y + z, -x + z).$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.

Solution. Soient $u = (x, y, z)$, $u' = (x', y', z') \in \mathbb{K}^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ donc

$$\begin{aligned} \varphi(u + \lambda v) &= ((-2x + y) + \lambda(-2x' + y'), (-3x + y + z) + \lambda(-3x' + y' + z'), (-x + z) + \lambda(-x' + z')) \\ &= \varphi(u) + \lambda \varphi(v) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire, et de plus il est clair que $\varphi : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$.

Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$. □

b. Justifier que $\varphi^2(u) = (x - y + z) \cdot v$, où $v = (1, 2, 1)$.

Solution. $\varphi^2(u)$ a pour composantes

$$\begin{cases} -2(-2x + y) + (-3x + y + z) = (x - y + z) \\ -3(-2x + y) + (-3x + y + z) + (-x + z) = 2(x - y + z) \\ -(-2x + y) + (-x + z) = (x - y + z) \end{cases}$$

donc on a bien $\varphi^2(u) = (x - y + z) \cdot v$, où $v = (1, 2, 1)$.

c. En déduire que φ est nilpotent.

Solution. Par linéarité, $\varphi^3(u) = (x - y + z) \cdot \varphi(v)$, et on a facilement $\varphi(v) = (0, 0, 0)$. On a donc $\varphi^3 = 0$ et donc φ est nilpotent. □

2. Dans cette question, et celle là seulement, on prend $E = \mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et on définit, pour tout $P \in E$,

$$\Delta(P(X)) = P(X + 1) - P(X).$$

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} \Delta(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X + 1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= [P(X + 1) - P(X)] + \lambda [Q(X + 1) - Q(X)] \\ &= \Delta(P) + \lambda \Delta(Q) \end{aligned}$$

par définition des opérations sur les polynômes. Ceci prouve que Δ est linéaire.

$P(X + 1)$ et $P(X)$ sont tous deux de même degré que P , lui même inférieur ou égal à n , donc $\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P(X + 1)), \deg(P(X))) = \deg(P) \leq n$. Ceci prouve que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par Δ , et finalement que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. □

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \frac{X(X - 1)}{2!}$, et plus généralement, $P_m = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (X - k)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

b. Justifier que $B_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution. $B_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$, échelonnée en degrés et de cardinal $(n + 1) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$, donc B_n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. □

c. Calculer $\Delta(P_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Solution. On a déjà $\Delta(P_0) = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$ est le polynôme nul, et $\Delta(P_1) = X + 1 - X = P_0$.

De plus pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Delta(P_k) &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (X + 1 - i) - \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=-1}^{k-2} (X - i) - \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-2} (X - i) \right) [(X + 1) - (X + 1 - k)] \\ &= \frac{1}{(k - 1)!} \prod_{i=0}^{k-2} (X - i) = P_{k-1} \end{aligned}$$

□ On retrouve ainsi la formule ci-dessus : $\Delta(P_k) = P_{k-1}$. □

d. En déduire le rang de Δ , puis déterminer $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$.

Solution. Ainsi $\Delta(B_n) = (0_{\mathbb{K}_n[X]}, P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$. Or le rang de $\Delta(B_n)$ est celui de $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) = B_{n-1}$, soit n . Enfin $\text{rg}(\Delta(B_n)) = \text{rg}(\Delta)$ (car B_n est une base de E donc $\Delta(B_n)$ génère $\text{Im}(\Delta)$) a donc $\text{rg}(\Delta) = n$. La formule du rang donne alors $\dim(\text{Ker}(\Delta)) = 1$. Comme $P_0 \in \text{Ker}(\Delta)$, on a donc $\text{Ker}(\Delta) = \text{vect}(P_0) = \mathbb{K}_0[X]$. Enfin on a $\text{Im} \Delta = \text{vect}(\Delta(B_n)) = \text{vect}(B_{n-1}) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ soit $\text{Im} \Delta = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. □

e. Établir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Solution. Une récurrence immédiate donne $\Delta^p(P_k) = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}_n[X]} & \text{si } p > k \\ P_{k-p} & \text{si } p \leq k \end{cases}$. On a alors $\Delta^{n+1}(P_k) = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et donc $\Delta^{n+1} = 0$ (car Δ s'annule sur tous les vecteurs d'une base). Cela prouve que Δ est un nilpotent. □

Solution. On a

$$\begin{aligned}\Delta(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X + 1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= [P(X + 1) - P(X)] + \lambda[Q(X + 1) - Q(X)] \\ &= \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)\end{aligned}$$

par définition des opérations sur les polynômes. Ceci prouve que Δ est linéaire.

$P(X + 1)$ et $P(X)$ sont tous deux de même degré que P , lui-même inférieur ou égal à n , donc $\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P(X + 1)), \deg(P(X))) = \deg(P) \leq n$. Ceci prouve que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par Δ , et finalement que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \frac{X(X-1)}{2!}$, et plus généralement, $P_m = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (X - k)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

b. Justifier que $B_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution. $B_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$, échelonnée en degrés et de cardinal $(n + 1) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$, donc B_n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

c. Calculer $\Delta(P_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Solution. On a déjà $\Delta(P_0) = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$ est le polynôme nul, et $\Delta(P_1) = X + 1 - X = P_0$. De plus pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\Delta(P_k) &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (X + 1 - i) - \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=-1}^{k-2} (X - i) - \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-2} (X - i) \right) [(X + 1) - (X + 1 - k)] \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=0}^{k-2} (X - i) = P_{k-1}\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule ci-dessus : $\Delta(P_k) = P_{k-1}$. $\square$

d. En déduire le rang de Δ , puis déterminer $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$.

Solution. Ainsi $\Delta(B_n) = (0_{\mathbb{K}_n[X]}, P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$. Or le rang de $\Delta(B_n)$ est celui de $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) = B_{n-1}$, soit n . Enfin $\text{rg}(\Delta(B_n)) = \text{rg}(\Delta)$ (car B_n est une base de E donc $\Delta(B_n)$ génère $\text{Im}(\Delta)$) a donc $\text{rg}(\Delta) = n$. La formule du rang donne alors $\dim(\text{Ker} \Delta) = 1$. Comme $P_0 \in \text{Ker} \Delta$, on a donc $\text{Ker}(\Delta) = \text{vect}(P_0) = \mathbb{K}_0[X]$. Enfin on a $\text{Im} \Delta = \text{vect}(\Delta(B_n)) = \text{vect}(B_{n-1}) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ soit $\text{Im} \Delta = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. $\square$

e. Établir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Solution. Une récurrence immédiate donne $\Delta^p(P_k) = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}_n[X]} & \text{si } p > k \\ P_{k-p} & \text{si } p \leq k \end{cases}$. On a alors $\Delta^{n+1}(P_k) = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et donc $\Delta^{n+1} = 0$ (car Δ s'annule sur tous les vecteurs d'une base). Cela prouve que Δ est un nilpotent. $\square$

Partie II : Propriétés générales

3. Soit p un projecteur de E .

a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que p soit nilpotent.

Solution. Soit p un projecteur de E . On a $p \circ p = p$ et, par récurrence immédiate, $p^n = p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'un projecteur p soit nilpotent, il est donc nécessaire et suffisant que $p = 0$. $\square$

b. Une symétrie de E peut-elle être nilpotente ?

Solution. De même, si s est une symétrie on a $s^2 = \text{Id}$ donc $s^n = \begin{cases} s & \text{si } n \text{ est impair} \\ \text{Id} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$. $\square$

Cela prouve qu'une symétrie ne peut pas être nilpotente.

4. Soient f et g deux endomorphismes de E .

a. Montrer que si f est nilpotent et que f et g commutent alors $f \circ g$ est nilpotent.

Solution. Si f est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$, et si f et g commutent alors $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n = 0$, ce qui établit que $f \circ g$ est lui aussi nilpotent. Si f est nilpotent et que f et g commutent alors $f \circ g$ est nilpotent. $\square$

b. Établir que si $f \circ g$ est nilpotent alors $g \circ f$ est nilpotent.

Solution. Si $f \circ g$ est nilpotent, soit n tel que $(f \circ g)^n = 0$. Comme $g \circ (f \circ g)^n \circ f = (g \circ f)^{n+1}$, on en déduit que $(g \circ f)^{n+1} = 0$ et donc que $g \circ f$ est nilpotent. Si $f \circ g$ est nilpotent alors $g \circ f$ est nilpotent. $\square$

5. Soit f un endomorphisme nilpotent de E .

a. Montrer que l'endomorphisme $\text{Id} - f$ est inversible.

Solution. Soit n tel que $f^n = 0$. On a alors (penser à la factorisation de $1 - X^n$ par $1 - X$ pour deviner le résultat et donc l'inverse):

$$(\text{Id} - f) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \sum_{k=0}^{n-1} (f^k - f^{k+1}) = \text{Id} - f^n = \text{Id}$$

ce qui prouve que $(\text{Id} - f)$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1} f^k$. $\square$

b. Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$.

Cet entier est appelé l'indice de nilpotence de l'endomorphisme nilpotent f , et on le note $\nu(f)$.

Solution. L'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k = 0$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ (car f est nilpotent par hypothèse) et minorée, et donc elle admet un plus petit élément. $\square$

6. Soit f un endomorphisme nilpotent de E , et $\nu(f)$ son indice de nilpotence. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $N_p = \text{Ker}(f^p)$.

a. Déterminer $N_{\nu(f)}$.

Solution. $N_{\nu(f)} = \text{Ker}(f^{\nu(f)}) = \text{Ker}(0) = E$ donc $N_{\nu(f)} = E$. $\square$

b. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.

Solution. Si $u \in N_p$ alors $f^p(u) = 0_E$ donc par linéarité, $f(f^p(u)) = f^{p+1}(u) = 0_E$ d'où $u \in N_{p+1}$. Cela prouve $N_p \subset N_{p+1}$. $\square$

c. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(N_p) = \dim(N_{p+1})$, alors $N_p = N_{p+q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Solution. Montrons par récurrence que $N_p = N_{p+q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

✕ Initialisation. Si $\dim N_p = \dim N_{p+1}$, comme on a déjà prouvé $N_p \subset N_{p+1}$, on en déduit $N_p = N_{p+1}$.

✕ Hérédité. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+q}$. Pour $u \in N_{p+q+1}$, on a alors $f^{p+q+1}(u) = f^{p+1}(f^q(u)) = 0_E$, donc $f^q(u) \in N_{p+1}$. Comme $N_p = N_{p+1}$, on a aussi $f^q(u) \in N_p$, donc $f^p(f^q(u)) = 0_E$ puis $u \in N_{p+q} = N_p$. Ainsi $N_{p+q+1} \subset N_p$. Comme par 4.b. on a $N_p = N_{p+q} \subset N_{p+q+1}$, on en déduit l'égalité et finalement l'hérédité de la propriété. D'où le résultat.

S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim N_p = \dim N_{p+1}$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$. $\square$

d. En déduire que $\nu(f) \leq \dim E$.

Solution. $\nu(f)$ étant le plus petit entier tel que $N_{\nu(f)} = E$, on en déduit par contraposée et par 4.b. que la suite des dimensions $(\dim N_p)_{0 \leq p \leq \nu(f)}$ est strictement croissante. Comme c'est une suite d'entiers naturels, on a donc $\forall p \in \llbracket 0, \nu(f) \rrbracket$, $\dim N_p \geq p$. En particulier $\dim N_{\nu(f)} \geq \nu(f)$. Par ailleurs on a aussi $\dim N_{\nu(f)} \leq \dim E$, et par transitivité, $\nu(f) \leq \dim E$. $\square$