

DEVOIR SURVEILLÉ

Exercice 1

1°) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1 + e^{2x}}{\cos x + \sin x}$.

2°) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ que l'on déterminera. On étudiera les positions relatives.

Exercice 2

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = e^x - \frac{1}{nx}.$$

1°) a) Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $g_n(x) = 0$ possède une unique solution u_n dans $]0, +\infty[$.

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nu_n = e^{-u_n}$.

2°) a) Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(u_n) > 0$.

b) En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

d) Montrer que $\ell = 0$.

3°) a) Montrer que $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) À l'aide de 1b, montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4°) *Une autre approche*

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = xe^x$.

a) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.

c) On admet que φ^{-1} admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

On note $\varphi^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} a + by + cy^2 + o(y^2)$ où a, b, c sont des réels.

Préciser la valeur de a .

d) En déterminant le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\varphi^{-1}(\varphi(x))$, déterminer les valeurs de b et c .

e) Retrouver, à l'aide de ce qui précède, le résultat de 3b.

Exercice 3

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y + 2z, x, y)$$

L'application identité de $\mathbb{R}^3$ sera notée id .

- 1°) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- 2°) Déterminer $\text{Ker } f$. Que peut-on en déduire ?
- 3°) a) Déterminer f^2 et f^3 .
 b) Vérifier que $f^3 = f^2 + f + 2\text{id}$.
 c) En déduire que f est une bijection et déterminer f^{-1} .

Exercice 4

E18 On considère les urnes suivantes :

- ▷ U_1 : 1 boule noire, 5 boules blanches ;
- ▷ U_2 : 3 boules noires, 1 boule blanche ;
- ▷ U_3 : 1 boule noire, 2 boules blanches.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
 Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?

***7. La rage prolifère...**

a) En notant $P(A|B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\bar{B}$ l'événement contraire de B, démontrer que :

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A) - P(A|B) \times P(B)}{1 - P(B)}.$$

(Indication : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$)

b) Application

Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivantes :

- 30 % des renards sont enrégés ;
- parmi les renards abattus, 40 % étaient enrégés.

En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enrégé.

(● dans la population des renards on pourra désigner par A l'ensemble des renards enrégés et par B l'ensemble des renards abattus au cours de la saison de chasse ;

- durant la période considérée on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage).

Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieur ou égal à 0,1 ?

c) A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $1/3$. Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la chasse. Quelle est dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ?

Exercice 5

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note (E_p) l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_p) : pz^p = z^{p-1} + \dots + z + 1 \quad \text{i.e.} \quad pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k.$$

1°) *Des exemples*

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner une solution évidente de (E_p) .

b) Résoudre $(E_2) : 2z^2 = z + 1$.

c) Résoudre $(E_3) : 3z^3 = z^2 + z + 1$.

Dans la suite, p désigne un entier naturel non nul, supérieur ou égal à 2.

2°) *Un résultat utile pour la suite*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}}$ soit réel.

a) Montrer qu'il existe un entier n tel que $\theta = \frac{2n\pi}{p+1}$.

b) En déduire que $\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

3°) *Un résultat sur le module des solutions*

Soit z une solution de (E_p) de module 1, et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On suppose dans cette question que cette solution est distincte de 1.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{p-1} z^k$.

b) En déduire l'égalité :

$$e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

c) Que peut-on en déduire ?