

Espaces euclidiens

Thème 19 - Géométrie euclidienne

[S19.1] Définition de produit scalaire

Soient E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et $x_0 \in E$. On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- φ une forme bilinéaire : $x \mapsto \varphi(x, x_0)$ et $x \mapsto \varphi(x_0, x)$ sont linéaires.
- φ est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est définie positive : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

On note souvent $\langle, \rangle$ ou $\langle | \rangle$ un produit scalaire.

✓ Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ en posant :

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On l'appelle produit scalaire canonique.

[S19.2] Définition de norme euclidienne

Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E . L'application de E dans $\mathbf{R}^+$: $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est appelée norme euclidienne sur E ou norme associée à $\langle, \rangle$.

[S19.3] Définition de vecteur normé

Dans tout espace muni d'un produit scalaire, on dit qu'un vecteur est unitaire ou normé si $\|x\| = 1$.

✓ Pour tout vecteur x non nul, il existe exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à x : $\frac{1}{\|x\|}x$ et $-\frac{1}{\|x\|}x$.

[S19.4] Relations entre norme et produit scalaire

Soient $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E et $\|.\|$ sa norme associée. On a, $\forall (x, y) \in E^2$:

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$;
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle$;
- $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x - y, x + y \rangle$.

[S19.5] Propriétés d'une norme euclidienne

Soient $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E et $\|.\|$ sa norme associée, alors :

- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x \in E, \lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

[S19.6] Identité du parallélogramme

Soit $\|.\|$ une norme euclidienne sur un espace vectoriel E . Soit $(x, y) \in E^2$, alors :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

[S19.7] Identité de polarisation

Soient $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E et $\|.\|$ sa norme associée. Soit $(x, y) \in E^2$, alors :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) .$$

✓ Pour montrer qu'une norme est euclidienne, on pose :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

et on montre que cette application est un produit scalaire.

[S19.8] Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E et $\|.\|$ sa norme associée. Soit $(x, y) \in E^2$, alors :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

✓ Pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) \, dt$ sur les fonctions continues, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz énoncée au chapitre 17.

[S19.9] Définition de vecteurs orthogonaux

Soient E muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$ et $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux (pour le produit scalaire $\langle, \rangle$), noté $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.

[S19.10] Vecteur orthogonal à tous les vecteurs

Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$ et $x \in E$.

- Si x est orthogonal à tous les vecteurs de E alors $x = 0_E$.
- Si x est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de E , alors $x = 0_E$.

[S19.11] Définition d'espaces orthogonaux

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$. On dit que F et G sont orthogonaux pour ce produit scalaire, et on note $F \perp G$, si :

$$\forall (x, y) \in F \times G, x \perp y.$$

[S19.12] Intersection de deux sous-espaces orthogonaux

Deux espaces orthogonaux sont en somme directe donc leur intersection est réduite au vecteur nul.

[S19.13] Orthogonal d’un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel d’un espace vectoriel E muni d’un produit scalaire $\langle, \rangle$. On appelle orthogonal de F le sous-ensemble :

$$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Autrement dit, l’orthogonal de F est l’ensemble des vecteurs orthogonaux à F .

[S19.14] Structure de l’orthogonal d’un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E muni d’un produit scalaire $\langle, \rangle$, alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

✓ On a $F^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

[S19.15] Caractérisation pratique de l’orthogonal en dimension finie

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie d’un espace vectoriel E muni d’un produit scalaire $\langle, \rangle$ et $x \in E$. Alors $x \in F^\perp$ si et seulement si x est orthogonal à tous les vecteurs d’une base de F .

[S19.16] Relation entre espace orthogonal et orthogonal de l’espace

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d’un espace vectoriel E muni d’un produit scalaire, alors :

$$F \perp G \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

En particulier, on a $F \subset (F^\perp)^\perp$.

✓ On verra plus tard que, si E est de dimension finie, alors F et $(F^\perp)^\perp$ sont de même dimension donc l’inclusion précédente implique l’égalité.

[S19.17] Définition de familles orthogonale et orthonormée

Soient E un espace vectoriel muni d’un produit scalaire et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que cette famille est orthogonale si :

$$\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

La famille est dite orthonormale ou orthonormée si :

$$\forall i, j, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une base orthogonale (respectivement orthonormée) est une base qui est une famille orthogonale (respectivement orthonormée).

[S19.18] Liberté d’une famille orthogonale

Une famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

[S19.19] Théorème de Pythagore

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille orthogonale d’un espace vectoriel E pour un produit scalaire $\langle, \rangle$ et si $\|.\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire, alors :

$$\|x_1 + \dots + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_p\|^2.$$

[S19.20] Définition d’espace euclidien

Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel de dimension finie muni d’un produit scalaire.

[S19.21] Existence d’une base orthonormée

Tout espace euclidien E non réduit à $\{0_E\}$ admet une base orthonormée.

[S19.22] Coordonnées dans une base orthonormée

Soient E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E pour le produit scalaire $\langle, \rangle$, alors pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

[S19.23] Expression du produit scalaire en fonction des coordonnées

Soient E un espace euclidien et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E pour le produit scalaire $\langle, \rangle$. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On

note : $X = Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = Mat_B(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X.Y.$$

✓ Ceci est faux si la base B n’est pas orthonormée pour le produit scalaire considéré.

LEBY-KOUADOU

[S19.24] Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

$F^\perp$ est alors appelé supplémentaire orthogonal de F .

✓ Le résultat est faux, en général, si F est de dimension infinie.

[S19.25] Théorème de la base orthonormée incomplète

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale d'un espace euclidien E de dimension n , alors elle peut être complétée en une base orthonormée de E . Autrement dit, il existe une famille orthonormale $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ telle que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

[S19.26] Définition de projection orthogonale

Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

✓ La projection est bien définie car on sait que les espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .

[S19.27] Inégalité de Bessel

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace euclidien E et p la projection orthogonale sur F . Alors :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

[S19.28] Définition de distance à un point

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire, alors on appelle distance de x à F le réel :

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

[S19.29] Expression de la distance en dimension finie

Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors, si l'on note p la projection orthogonale sur F , on a :

$$d(x, F) = \|x - p(x)\| = \min\{\|x - y\|, y \in F\}.$$

Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est le point de F le plus proche de x .

[S19.30] Expression du projeté orthogonal

Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthogonale de F . On a alors :

$$p(x) = \sum_{i=1}^p \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

En particulier, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , on a :

$$p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

[S19.31] Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base quelconque d'un espace euclidien E . Alors, il existe une unique base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que :

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_k, u_k \rangle$ est strictement positif.

En pratique, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$\tilde{e}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i,$$

puis :

$$e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}.$$

Thème 19 - Géométrie euclidienne

■ Comment montrer qu'une application est un produit scalaire ?

SF19.1 Appliquer la définition

On revient à la définition du produit scalaire en montrant que c'est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive ([S19.1]).

Exemple

Montrer que :

$$\langle, \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([-1, 1], \mathbf{R})^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \int_{-1}^1 (1-t^2)f(t)g(t) dt \end{cases}$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbf{R})$.

La symétrie est claire puisque, pour tout (f, g) ,

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)f(t)g(t) dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)g(t)f(t) dt.$$

Montrons la linéarité par rapport à la première variable. Pour cela, on se donne f, g et h des fonctions continues et un réel λ . Alors :

$$\begin{aligned} \langle f + \lambda h, g \rangle &= \int_{-1}^1 (1-t^2)(f + \lambda h)(t)g(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)(f(t) + \lambda h(t))g(t) dt. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-t^2)(f(t) + \lambda h(t))g(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)f(t)g(t) dt + \lambda \int_{-1}^1 (1-t^2)h(t)g(t) dt \\ &= \langle f, g \rangle + \lambda \langle h, g \rangle. \end{aligned}$$

L'application est donc linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie, on en déduit qu'elle est bilinéaire.

On a :

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 (1-t^2)f^2(t) dt \geq 0,$$

car $t \mapsto (1-t^2)f^2(t)$ est une fonction positive. De plus, si $\langle f, f \rangle = 0$, on a l'intégrale nulle d'une fonction continue et positive ce qui implique, par

stricte positivité de l'intégrale, que la fonction $t \mapsto (1-t^2)f^2(t)$ est nulle. On a donc :

$$\forall t \in [-1, 1], (1-t^2)f^2(t) = 0,$$

ce qui implique :

$$\forall t \in]-1, 1[, f^2(t) = 0.$$

La fonction f étant continue, on en déduit qu'elle est nulle sur tout $[-1, 1]$.

On a montré que $\langle, \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est bien un produit scalaire.

Exemple

Montrer que $\langle P, Q \rangle = P'(0)Q'(0) + P'(1)Q'(1) + P(0)Q(0)$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$.

On commence par la symétrie qui est claire. De plus, si P, Q, R sont trois polynômes de $\mathbf{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} &\langle P + \lambda R, Q \rangle \\ &= (P + \lambda R)'(0)Q'(0) + (P + \lambda R)'(1)Q'(1) + (P + \lambda R)(0)Q(0). \end{aligned}$$

Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} &\langle P + \lambda R, Q \rangle \\ &= (P'(0) + \lambda R'(0))Q'(0) + (P'(1) + \lambda R'(1))Q'(1) \\ &\quad + (P(0) + \lambda R(0))Q(0), \end{aligned}$$

ce qui est égal à $\langle P, Q \rangle + \lambda \langle R, Q \rangle$ en développant. On a montré la linéarité par rapport à la première variable ; par symétrie, on en déduit la bilinéarité.

On a :

$$\langle P, P \rangle = P'(0)^2 + P'(1)^2 + P(0)^2 \geq 0.$$

De plus, si $\langle P, P \rangle = 0$, on a une somme nulle de carrés réels donc :

$$P'(0) = 0, \quad P'(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

Le polynôme P' possède deux racines distinctes, or il est de degré au plus 1. Il est donc nul donc P est constant. Comme $P(0) = 0$, on en déduit que P est nul.

✓ On peut aussi poser $P = aX^2 + bX + c$. On a alors :

$$P'(0) = 0 = b, \quad P'(1) = 0 = 2a + b \quad \text{et} \quad P(0) = 0 = c.$$

et on retrouve que P est nul.

On a montré que $\langle, \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. C'est un produit scalaire.

SF19.2 Appliquer la définition

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est défini comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à cet espace ([S19.13]).

Exemple
Déterminer l'orthogonal des fonctions paires pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) \, dt$$

sur $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbf{R})$.

Soit donc h une fonction telle que :

$$\forall f \text{ paire}, \langle f, h \rangle = 0 = \int_{-1}^1 f(t)h(t) \, dt.$$

Il faut se souvenir que toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. En effet, $\forall t \in [-1, 1]$, on a :

$$h(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2} + \frac{h(t) - h(-t)}{2},$$

où $h_1 : t \mapsto \frac{h(t) + h(-t)}{2}$ est paire et $h_2 : t \mapsto \frac{h(t) - h(-t)}{2}$ est impaire. Remplaçons h par $h_1 + h_2$ dans l'intégrale, on a :

$$\langle h, f \rangle = 0 = \langle h_1, f \rangle + \langle h_2, f \rangle.$$

On sait que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 est nulle. Or $h_2 f$ est impaire quelle que soit la fonction paire f . On a donc $\langle h_2, f \rangle = 0$ ce qui implique que :

$$\forall f \text{ paire}, \langle f, h_1 \rangle = 0.$$

Or h_1 est une fonction paire, le produit scalaire doit donc être nul en prenant $f = h_1$. On a donc :

$$\langle h_1, h_1 \rangle = 0,$$

ce qui implique :

$$h_1 = 0,$$

puis

$$h = h_2,$$

ce qui montre que h est impaire. Un élément de l'orthogonal des fonctions paires est donc nécessairement une fonction impaire. Comme on sait qu'une

fonction impaire appartient à l'orthogonal des fonctions paires (puisque l'intégrale d'une fonction impaire sur $[-1, 1]$ est nulle), on a montré que l'orthogonal des fonctions paires est l'ensemble des fonctions impaires.

SF19.3 Chercher les vecteurs orthogonaux à une base

Lorsqu'on travaille en dimension finie, on peut utiliser la caractérisation pratique de l'orthogonal ([S19.15]).

Exemple
Déterminer l'orthogonal de $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X], P(1) = 0\}$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$. (On vérifie, en effet, facilement que c'est un produit scalaire).

On commence par déterminer une base de F . On sait qu'un polynôme P appartient à F si et seulement s'il est divisible par $X - 1$. Il s'écrit donc $P = (X - 1)(aX + b) = aX(X - 1) + b(X - 1)$, une base de F est donc $(X(X - 1), X - 1)$. Soit maintenant $Q \in \mathbf{R}_2[X]$, alors :

$$\begin{aligned} Q \in F^\perp &\iff \begin{cases} \langle Q, X(X - 1) \rangle = 0 \\ \langle Q, X - 1 \rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2Q(2) = 0 \\ -Q(0) + Q(2) = 0 \end{cases} \\ &\iff Q(0) = 0 = Q(2). \end{aligned}$$

Comme Q est de degré au plus 2, on a :

$$Q \in F^\perp \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, Q = \lambda X(X - 2),$$

donc :

$$F^\perp = \text{Vect}(X(X - 2)).$$

SF19.4 Interpréter les équations de l'espace vectoriel

On suppose qu'on travaille en dimension finie. Si l'espace vectoriel F est donné sous forme d'équations, on peut les interpréter comme des produits scalaires nuls ce qui permet d'identifier F à l'orthogonal d'un espace vectoriel. Comme l'orthogonal de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est lui-même ([S19.16]), on aura alors directement l'orthogonal de F .

Exemple
Déterminer l'orthogonal de

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, 2x - y + z + t = 0 = x + y + 2z - t\}.$$

On suppose $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Alors on peut écrire :

$$F = \left\{ \begin{array}{ll} (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, & <(2,-1,1,1),(x,y,z,t)>=0 \\ \text{et} & <(1,1,2,-1),(x,y,z,t)>=0 \end{array} \right\}.$$

Ainsi écrit, on a :

$$F = (\text{Vect } ((2,-1,1,1), (1,1,2,-1)))^\perp.$$

On en déduit que :

$$F^\perp = \text{Vect } ((2,-1,1,1), (1,1,2,-1)).$$

■ Comment déterminer une base orthonormée ?

SF19.5 Faire preuve d'intuition

Exemple

On suppose $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Déterminer une base orthonormée de $F = \text{Vect } ((1,-1,1,-1), (0,1,0,1))$.

On remarque que :

$$F = \text{Vect } ((1,0,1,0), (0,1,0,1)),$$

et que les deux vecteurs sont orthogonaux. On en déduit qu'une base ortho-normée de F est :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1) \right).$$

SF19.6 Utiliser le procédé de Gram-Schmidt

Il permet de construire, de manière algorithmique, une base orthonormée à partir d'une base quelconque ([S19.31]).

Exemple

Déterminer une base orthonormée de $F = \text{Vect } ((1,-1,1,-1), (0,1,0,1))$ pour le produit scalaire canonique.

On pose $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$ puis :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2 &= (1,-1,1,-1) - \frac{<(1,-1,1,-1),(0,1,0,1)>}{2}(0,1,0,1) \\ &= (1,-1,1,-1) + (0,1,0,1) \\ &= (1,0,1,0). \end{aligned}$$

Enfin, en posant $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$, on a (e_1, e_2) base orthonormée de F .

SF19.7 Utiliser un sous-espace vectoriel

Si on travaille en dimension finie, on peut obtenir une base orthonormée d'un espace vectoriel E en utilisant le fait qu'un sous-espace vectoriel et son orthogonal sont supplémentaires ([S19.24]).

Exemple

On suppose $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $<,>: (P,Q) \longrightarrow \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$. Déterminer une base orthonormée de $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X], P(1) = 0\}$. En déduire une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$.

On sait qu'une base de F est $((X-1), X(X-1))$. On calcule :

$$|| (X-1) ||^2 = <X-1, X-1> = (-1)^2 + 0 + 1^2 = 2.$$

On pose donc $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$. On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 &= X(X-1) - \frac{<X(X-1), X-1>}{2}(X-1) \\ &= X(X-1) - (X-1) \\ &= (X-1)^2. \end{aligned}$$

Comme on a :

$$|| (X-1)^2 ||^2 = <(X-1)^2, (X-1)^2> = 2,$$

On pose :

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)^2.$$

La famille (P_1, P_2) est une base orthonormée de F . On a montré précédemment que l'orthogonal de F est $\text{Vect } (X(X-2))$. Comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_2[X]$, la famille $(P_1, P_2, X(X-2))$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$ ([S15.21]). De plus, par construction, elle est orthogonale. On a :

$$|| X(X-2) ||^2 = 1,$$

c'est donc une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$.

■ Comment déterminer le projeté orthogonal ?

En dimension finie, on utilise l'expression du projeté dans une base orthogonale. Il faut donc, au préalable, déterminer une base orthogonale de F . Dans le cas

où $F^\perp$ est de dimension inférieure à F , il est plus court de déterminer une base orthogonale de $F^\perp$ et de calculer ainsi le projeté sur $F^\perp$. Si l'on note p_F et $p_{F^\perp}$ les projections orthogonales sur F et $F^\perp$, on a $p_F + p_{F^\perp} = \text{id}$ donc on trouve facilement le projeté sur F à partir de celui sur $F^\perp$.

SF19.8 Utiliser l'expression dans une base orthonormée

Exemple

On suppose $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle, \rangle : (P, Q) \longrightarrow \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$. Soit $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X], P(1) = 0\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $X^2 + 1$ sur F .

On a vu qu'une base orthonormée de F est :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1)^2 \right).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & p_F(X^2 + 1) \\ = & \frac{\langle X^2 + 1, X - 1 \rangle}{2}(X - 1) + \frac{\langle X^2 + 1, (X - 1)^2 \rangle}{2}(X - 1)^2 \\ = & \frac{4}{2}(X - 1) + \frac{6}{2}(X - 1)^2 \\ = & (X - 1)(2 + 3(X - 1)) \\ = & (X - 1)(3X - 1). \end{aligned}$$

■ Comment calculer la distance à un espace vectoriel de dimension finie ?

Quand on cherche la distance d'un vecteur x à un espace vectoriel de dimension finie F , on sait que :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|,$$

où p_F et $p_{F^\perp}$ désignent les projections orthogonales sur F et $F^\perp$. On peut choisir de déterminer $p_F(x)$ ou directement $p_{F^\perp}(x)$ ([S19.29]).

SF19.9 Utiliser l'orthogonal

Exemple

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, 2x + y - 3z + t = 0\}$, $\mathbf{R}^4$ étant muni du produit scalaire canonique. Déterminer la distance de $(1, 1, 1, 1)$ à F .

Notons p_F la projection orthogonale sur F et $p_{F^\perp}$ celle sur $F^\perp$. Ici, F est de dimension 3, son orthogonal est donc de dimension 1. De plus, on sait que :

$$F^\perp = \text{Vect}((2, 1, -3, 1)).$$

On a $\|(2, 1, -3, 1)\| = \sqrt{15}$, donc :

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1) - p_F(1, 1, 1, 1) &= p_{F^\perp}(1, 1, 1, 1) \\ &= \frac{\langle (1, 1, 1, 1), (2, 1, -3, 1) \rangle}{15}(2, 1, -3, 1) \\ &= \frac{1}{15}(2, 1, -3, 1). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$d((1, 1, 1, 1), F) = \left\| \frac{1}{15}(2, 1, -3, 1) \right\| = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

SF19.10 Déterminer le projeté orthogonal

Exemple

Déterminer la distance de $X^3 + X - 1$ à $G = \mathbf{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$.

On commence par déterminer une base orthogonale de $\mathbf{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire. On a $\|1\| = \sqrt{3}$. On calcule :

$$X - \frac{\langle X, 1 \rangle}{3}1 = X - 1,$$

on en déduit que $(1, X - 1)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_1[X]$. Si l'on note p la projection orthogonale sur G , on a :

$$\begin{aligned} p(X^3 + X - 1) &= \frac{\langle X^3 + X - 1, 1 \rangle}{3} + \frac{\langle X^3 + X - 1, X - 1 \rangle}{2}(X - 1) \\ &= 3 + \frac{10}{2}(X - 1) \\ &= 5X - 2, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} X^3 + X - 1 - p(X^3 + X - 1) &= X^3 + X - 1 - 5X + 2 \\ &= X^3 - 4X + 1. \end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} d(X^3 + X - 1, G) &= \|X^3 - 4X + 1\| \\ &= \sqrt{1 + 4 + 1} \\ &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

■ Comment utiliser Cauchy-Schwarz ?

On l'utilise pour montrer une inégalité en identifiant celle-ci comme l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire, appliquée à deux vecteurs ([S19.8]).

SF19.11 Reconnaître un produit scalaire

Exemple

Soient x, y, z trois réels tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$, montrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$.

On utilise le produit scalaire $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$. On observe que $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ est la norme du vecteur $(x, y\sqrt{2}, z\sqrt{3})$. On interprète alors $x + y + z$ comme le produit scalaire de ce vecteur et du vecteur $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. D'après Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= \left\langle 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle, (x, y\sqrt{2}, z\sqrt{3}) \rangle \\ &\leq \left\| \left\langle 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \right\|^2 \cdot \|(x, y\sqrt{2}, z\sqrt{3})\|^2 \\ &\leq \left\| \left\langle 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \right\|^2 \\ &= \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

À vous de jouer !

Exercice 19.1 SF19.1

L'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}_2[X]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2 \end{cases}$$

avec $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$?

Exercice 19.2 SF19.1

Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \sum_{k=0}^n P(k)Q(k) \end{cases}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 19.3 SF19.1 SF19.3

- 1) Montrer que l'application $\langle, \rangle : \begin{cases} \mathbf{M}_n(\mathbf{R})^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \text{tr}({}^tAB) \end{cases}$ est un produit scalaire.

2) Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales de taille n pour ce produit scalaire.

Exercice 19.4 SF19.2

Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0[X]$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k).$$

Exercice 19.5 SF19.3

Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_1[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) \, dt.$$

Exercice 19.6 SF19.3

Déterminer l'orthogonal de $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 1), (2, 0, 1, -1))$ pour le produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^4 i.x_i.y_i$ avec $X = (x_1, \dots, x_4)$, $Y = (y_1, \dots, y_4)$.

Exercice 19.7 SF19.4

Déterminer l'orthogonal de F pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^4$ avec :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, 2x + 3y - z = 0 = x + y = z - 4t\}.$$

Exercice 19.8**SF19.5**

Soit :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}.$$

Déterminer une base orthonormée de F pour le produit scalaire canonique.**Exercice 19.9****SF19.6**Déterminer une base orthonormée de $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X], P(1) = 0\}$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = P'(0)Q'(0) + P'(1)Q'(1) + P(0)Q(0)$.**Exercice 19.10****SF19.3****SF19.6****SF19.7**1) Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 tP(t)Q(t) dt.$$

2) Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_1[X]$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.3) En déduire une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.**Exercice 19.11****SF19.9****SF19.10**Soit $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Déterminer la distance de $(1, 2, 3)$ à :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y - z = 0\}$$

de deux manières différentes.

Exercice 19.12**SF19.8****19.10**Soit $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Déterminer la distance de $(1, 1, 1)$ à $D = \text{Vect}((1, -1, 2))$.**Exercice 19.13****SF19.11**Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

Exercice 19.14**SF19.11**Soient $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n)$ des réels positifs. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \sum_{k=1}^n b_k^2 c_k.$$

Exercice 19.15**SF19.11**Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(3x + 2y + z)^2 \leq 14$.**Exercice 19.16****SF19.5****SF19.8**Soit $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Déterminer le projeté du vecteur $v = (1, 2, -1)$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.**Exercice 19.17****SF19.9**Soit $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Déterminer la distance du vecteur $(2, 1, 1)$ au plan d'équation $x - y + 2z = 0$.**Exercice 19.18****SF19.9**Soit $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^2 a_k b_k$ où $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ et $Q = b_2 X^2 + b_1 X + b_0$.Déterminer la distance du vecteur $X^2 - 2$ à $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X], P(1) = 0\}$.

Correction des exercices

Exercice 19.1

On commence par montrer la symétrie. Pour cela, on développe l'expression donnée :

$$\varphi(P, Q) = a_0b_0 + a_1b_0 + a_0b_1 + 3a_1b_1 + 3a_2b_2$$

On a

$$\varphi(Q, P) = b_0a_0 + b_1a_0 + b_0a_1 + 3b_1a_1 + 3b_2a_2$$

Il est alors clair que $\varphi(Q, P) = \varphi(P, Q)$. Pour montrer la linéarité de φ par rapport à la première variable, on se donne $R = c_0 + c_1X + c_2X^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P + \lambda R \\ = (a_0 + \lambda c_0) + (a_1 + \lambda c_1)X + (a_2 + \lambda c_2)X^2, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda R, Q) &= (a_0 + \lambda c_0)b_0 + (a_0 + \lambda c_0)b_1 \\ &\quad + (a_1 + \lambda c_1)b_0 + 3(a_1 + \lambda c_1)b_1 + \\ &\quad + 3(a_2 + \lambda c_2)b_2 \\ &= a_0b_0 + a_1b_0 + a_0b_1 + 3a_1b_1 + 3a_2b_2 \\ &\quad + \lambda(c_0b_0 + c_1b_0 + c_0b_1 + 3c_1b_1 + 3c_2b_2) \\ &= \varphi(P, Q) + \lambda\varphi(R, Q). \end{aligned}$$

La forme φ est donc linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie, elle est bilinéaire.

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) &= a_0^2 + 2a_0a_1 + 3a_1^2 + 3a_2^2 \\ &= (a_0 + a_1)^2 + 2a_1^2 + 3a_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, si $\varphi(P, P) = 0$, on a une somme nulle de carrés réels, chaque terme est donc nul ce qui implique $P = 0$. La forme φ est bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est un produit scalaire.

Exercice 19.2

La symétrie est claire, montrons la linéarité par rapport à une variable. Soient $(P_1, P_2, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= \sum_{k=0}^n (\lambda P_1 + P_2)(k)Q(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n P_1(k)Q(k) + \sum_{k=0}^n P_2(k)Q(k). \end{aligned}$$

On a bien :

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q).$$

L'application est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie, elle est bilinéaire.

On a :

$$\varphi(Q, Q) = \sum_{k=0}^n Q(k)^2$$

donc :

$$\varphi(Q, Q) \geq 0$$

ce qui montre que c'est une forme positive.

Si $\varphi(Q, Q) = 0$, on a une somme nulle de réels positifs, ils sont donc nuls :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(k) = 0.$$

Le polynôme Q possède alors $n + 1$ racines alors qu'il est de degré au plus n . Il est donc nul ce qui montre que la forme est définie.

On a montré que φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive donc c'est un produit scalaire.

Exercice 19.3

1) Montrons la symétrie :

$$\langle B, A \rangle = \text{tr}({}^tBA).$$

On sait qu'une matrice et sa transposée ont même trace donc :

$$\begin{aligned} \text{tr}({}^tBA) &= \text{tr}({}^t({}^tBA)) \\ &= \text{tr}({}^tAB). \end{aligned}$$

La forme est donc symétrique. Elle est linéaire par rapport la première variable par linéarité de la trace et de la transposition. On en déduit qu'elle est bilinéaire. Pour montrer qu'elle est définie positive, on doit expliciter $\text{tr}({}^tAA)$. On note $A = (a_{ij})$. Alors, le coefficient d'indice (i, i) du produit tAA est égal, par définition du produit matriciel à :

$$\sum_{k=1}^n ({}^tA)_{ik} a_{ki}.$$

Or, par définition de la transposée, $({}^tA)_{ik} = a_{ki}$. Le coefficient d'indice (i, i) du produit tAA est donc :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^2,$$

d'où :

$$\langle A, A \rangle = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ik}^2.$$

Il est maintenant clair que pour toute matrice A de $M_n(\mathbf{R})$, on a :

$$\langle A, A \rangle \geq 0.$$

LEBY-KOUADOU

De plus, si $\langle A, A \rangle = 0$, alors on a une somme nulle de réels positifs, ils sont donc tous nuls :

$\forall i, k \ a_{ik} = 0,$

ce qui montre que la matrice est nulle. On a montré que l'application est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est bien un produit scalaire.

2) On sait que $(E_{11}, \dots, E_{nn})$ est une base de l'espace vectoriel des matrices diagonales. On rappelle que E_{ij} désigne la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1.

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, alors :

$$A \in (D_n(\mathbf{R}))^\perp \iff \forall i \in [1, n], \ \langle E_{ii}, A \rangle = 0.$$

Déterminons ce que vaut $\langle E_{ii}, A \rangle$. Il faut, dans un premier temps, déterminer la valeur des coefficients diagonaux de la matrice ${}^tE_{ii}A$. Remarquons ici que, E_{ii} étant diagonale, on a ${}^tE_{ii} = E_{ii}$. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $E_{ii} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $E_{ii}A = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a alors :

$$c_{kk} = \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{jk}.$$

On sait que le coefficient b_{jk} de E_{ii} est nul sauf pour $k = j = i$. On a donc :

$$c_{kk} = \begin{cases} a_{ii} & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\text{tr} ({}^tE_{ii}A) = a_{ii}.$$

On a donc :

$$A \in (D_n(\mathbf{R}))^\perp \iff \forall i \in [1, n], a_{ii} = 0.$$

L'orthogonal de l'espace des matrices diagonales est donc l'espace vectoriel des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 19.4

Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$, alors :

$$P \in \mathbf{R}^\perp \iff \forall \lambda \in \mathbf{R}, \langle P, \lambda \rangle = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\lambda \sum_{k=0}^2 P(k) = 0.$$

On a donc :

$$\mathbf{R}^\perp = \{P \in \mathbf{R}_2[X], P(0) + P(1) + P(2) = 0\}.$$

Exercice 19.5

Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$, alors :

$$P \in \mathbf{R}_1[X]^\perp \iff \begin{cases} \langle P, 1 \rangle = 0 \\ \langle P, X \rangle = 0 \end{cases}.$$

On pose $P = aX^2 + bX + c$, alors :

$$\langle P, 1 \rangle = \int_{-1}^1 (at^2 + bt + c) dt = \frac{2a}{3} + 2c,$$

et

$$\langle P, X \rangle = \int_{-1}^1 (at^3 + bt^2 + ct) dt = \frac{2b}{3}.$$

On a donc :

$$P \in \mathbf{R}_1[X]^\perp \iff b = 0 \text{ et } a = -3c,$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathbf{R}_1[X]^\perp = \text{Vect} (3X^2 - 1).$$

Exercice 19.6

Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, alors :

$$X \in G^\perp \iff \begin{cases} \langle X, (1, -2, 1, 1) \rangle = 0 \\ \langle X, (2, 0, 1, -1) \rangle = 0. \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} X \in G^\perp \\ \iff \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} G^\perp = \\ \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, \begin{array}{l} x - 4y + 3z + 4t = 0 \\ \text{et } 2x + 3z - 4t = 0. \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 19.7

On pose :

- $V_1 = (2, 3, -1, 0)$,
- $V_2 = (1, 1, 0, 0)$ et
- $V_3 = (0, 0, 1, -4)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} F = \{X \in \mathbf{R}^4, \langle X, V_1 \rangle = 0, \\ \langle X, V_2 \rangle = 0 \text{ et } \langle X, V_3 \rangle = 0\}, \end{aligned}$$

donc :

$$F = (\text{Vect} (V_1, V_2, V_3))^\perp.$$

On en déduit que :

$$F^\perp = \text{Vect} (V_1, V_2, V_3).$$

Exercice 19.8

Les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 1, -2)$ sont deux vecteurs orthogonaux de F et forment une base de F . Il suffit de diviser par leur norme pour obtenir une base orthonormée de F :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right).$$

Exercice 19.9

On sait qu'une base de F est $(X - 1, X(X - 1))$. Posons $P = X - 1$ et $Q = X(X - 1)$, alors :

$$\begin{aligned} \langle X - 1, X(X - 1) \rangle \\ = P'(0)Q'(0) + P'(1)Q'(1) + P(0)Q(0) \\ = -1 + 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Les deux polynômes sont orthogonaux. Il suffit de déterminer leur norme pour

LMAUTUN 24-25

avoir une base orthonormée de F :

$$\begin{aligned} ||X - 1||^2 &= \langle X - 1, X - 1 \rangle \\ &= P'(0)^2 + P'(1)^2 + P(0)^2 \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} ||X(X - 1)||^2 \\ &= \langle X(X - 1), X(X - 1) \rangle \\ &= Q'(0)^2 + Q'(1)^2 + Q(0)^2 \\ &= 1 + 1 + 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Une base orthonormée de F est donc :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(X - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}X(X - 1) \right).$$

Exercice 19.10

1) On va orthonormaliser la base canonique de $\mathbf{R}_1[X]$ avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On commence par déterminer la norme du polynôme constant égal à 1 :

$$||1||^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

On pose donc $P_1 = \sqrt{2}$. Déterminons maintenant :

$$\tilde{P}_2 = X - \frac{\langle X, 1 \rangle}{||1||^2} = X - 2 \langle X, 1 \rangle.$$

On a :

$$\langle X, 1 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

donc :

$$\tilde{P}_2 = X - \frac{2}{3}.$$

Or :

$$\begin{aligned} ||\tilde{P}_2||^2 &= < \tilde{P}_2, \tilde{P}_2 > \\ &= \int_0^1 t \left(t - \frac{2}{3} \right)^2 dt \\ &= \int_0^1 t \left(t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

On pose $P_2 = 6 \left(X - \frac{2}{3} \right) = 6X - 4$. La famille $(P_1, P_2) = (\sqrt{2}, 6X - 4)$ est donc une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

2) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$. On a :

$$P \in \mathbf{R}_1[X]^\perp \iff \begin{cases} < P, 1 > = 0 \\ < P, X > = 0, \end{cases}$$

ce qui se traduit, en utilisant l'expression du produit scalaire, par :

$$\begin{cases} \int_0^1 tP(t) dt &= 0 \\ \int_0^1 t^2P(t) dt &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} &= 0 \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} &= 0 \end{cases}.$$

On résout le système, on trouve :

$$\begin{cases} b = -4c \\ 3a = 10c. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\mathbf{R}_1[X]^\perp = \text{Vect} \left(10X^2 - 12X + 3 \right).$$

3) Cherchons une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]^\perp$, il suffit pour cela de normaliser le vecteur $10X^2 - 12X + 3$ trouvé à la question précédente. On a :

$$\begin{aligned} ||10X^2 - 12X + 3||^2 &= \int_0^1 t \left(10t^2 - 12t + 3 \right)^2 dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &t \left(10t^2 - 12t + 3 \right)^2 \\ &= t \left(100t^4 - 240t^3 + 204t^2 - 72t + 9 \right) \\ &= 100t^5 - 240t^4 + 204t^3 - 72t^2 + 9t \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &||10X^2 - 12X + 3||^2 \\ &= \left[100 \frac{t^6}{6} - 240 \frac{t^5}{5} + 204 \frac{t^4}{4} - 72 \frac{t^3}{3} + 9 \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &\sqrt{6}(10X^2 - 12X + 3) \\ &\text{base orthonormée de } \mathbf{R}_1[X]^\perp. \text{ On sait que la concaténation d'une base orthonormée de } \mathbf{R}_1[X] \text{ et d'une base orthonormée de } \mathbf{R}_1[X]^\perp \text{ est une base orthonormée de } \mathbf{R}_2[X]. \text{ On a donc :} \\ &\left(\sqrt{2}, 6X - 4, \sqrt{6}(10X^2 - 12X + 3) \right) \end{aligned}$$

base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 19.11

lère méthode :

On va déterminer le projeté orthogonal de $(1, 2, 3)$ sur F . Il faut pour cela déterminer une base orthonormée de F . Une base de F est :

$$((1, 0, 1), (0, 1, 2)).$$

On pose :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{|| (1, 0, 1) ||} (1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1), \\ \text{puis :} \\ \tilde{e}_2 &= (0, 1, 2) - \frac{< (0, 1, 2), (1, 0, 1) >}{2} (1, 0, 1) \\ &= (0, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 1), \end{aligned}$$

donc en posant :

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1),$$

on a (e_1, e_2) une base orthonormée. Notons p_F la projection orthogonale sur F , on peut utiliser l'expression du projeté dans une base orthonormée :

$$\begin{aligned} &p_F(1, 2, 3) \\ &= \frac{< (1, 2, 3), (1, 0, 1) >}{2} (1, 0, 1) + \frac{< (1, 2, 3), (-1, 1, 1) >}{3} (-1, 1, 1) \\ &= 2(1, 0, 1) + \frac{4}{3} (-1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{3} (2, 4, 10). \end{aligned}$$

On en déduit que la distance de $(1, 2, 3)$ à F vaut :

$$\begin{aligned} ||(1, 2, 3) - \frac{1}{3} (2, 4, 10)|| &= \frac{1}{3} ||(1, 2, -1)|| \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

2ème méthode :

On sait que $F^\perp = \text{Vect}((1, 2, -1))$. Si l'on note $p_{F^\perp}$ la projection sur $F^\perp$, on a :

$$\begin{aligned} &p_{F^\perp}(1, 2, 3) \\ &= \frac{< (1, 2, -1), (1, 2, 3) >}{||(1, 2, -1)||^2} (1, 2, -1) \\ &= \frac{1}{3} (1, 2, -1). \end{aligned}$$

et la distance est égale à la norme de $p_{F^\perp}(1, 2, 3)$ donc à $\frac{\sqrt{6}}{3}$. On remarque que la deuxième méthode est beaucoup plus rapide.

Exercice 19.12

Notons p la projection orthogonale sur

D. On a :

$$\begin{aligned} &p(1, 1, 1) \\ &= \frac{< (1, 1, 1), (1, -1, 2) >}{6} (1, -1, 2) \\ &= \frac{1}{3} (1, -1, 2), \\ \text{donc :} \\ &d((1, 1, 1), D) \\ &= \left\| (1, 1, 1) - \frac{1}{3} (1, -1, 2) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{3} (2, 4, 1) \right\| \\ &= \frac{\sqrt{21}}{3} \\ &= \sqrt{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

Exercice 19.13

On veut reconnaître Cauchy-Schwarz. On considère $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. L'égalité :

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1$$

correspond alors à :

$$||X||^2 = 1$$

avec :

$$X = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}).$$

Vu le sens de l'inégalité, on doit trouver un vecteur Y tel que :

$$||Y||^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}.$$

On pose :

$$Y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que :

$$< X, Y >^2 \leq ||X||^2 \cdot ||Y||^2.$$

On a :

$$< X, Y > = \sum_{k=1}^n 1 = n,$$

donc :

$$\langle X, Y \rangle^2 = n^2.$$

On a donc bien :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

Exercice 19.14

À nouveau, on cherche à reconnaître une inégalité de Cauchy-Schwarz. On muni $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose :

$$X = (a_1\sqrt{c_1}, \dots, a_n\sqrt{c_n})$$

et :

$$Y = (b_1\sqrt{c_1}, \dots, b_n\sqrt{c_n}).$$

On a alors :

$$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 c_k,$$

$$\|Y\|^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 c_k,$$

et

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k c_k.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \sum_{k=1}^n b_k^2 c_k.$$

Exercice 19.15

On munit $\mathbf{R}^3$ du produit scalaire canonique. L'inégalité $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ peut être interprétée comme $\|X\|^2 \leq 1$ avec $X = (x, y, z)$.

Cherchons un vecteur Y de $\mathbf{R}^3$ tel que $\langle X, Y \rangle = 3x + 2y + z$. On pose :

$$Y = (3, 2, 1).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$(3x + 2y + z)^2 = \langle X, Y \rangle^2 \leq \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2.$$

On sait que $\|X\|^2 \leq 1$, calculons $\|Y\|^2$:

$$\|Y\|^2 = 9 + 4 + 1 = 14.$$

On a donc bien :

$$(3x + 2y + z)^2 \leq 14.$$

Exercice 19.16

On remarque que les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(1, -2, 1)$ sont deux vecteurs orthogonaux du plan d'équation $x + y + z = 0$. On peut donc déterminer l'expression du projeté orthogonal $p(v)$ en utilisant la formule :

$$\begin{aligned} p(v) &= \frac{\langle (1, 2, -1), (1, -2, 1) \rangle}{\|(1, -2, 1)\|^2} (1, -2, 1) \\ &\quad + \frac{\langle (1, 2, -1), (1, 0, -1) \rangle}{\|(1, 0, -1)\|^2} (1, 0, -1) \\ &= -\frac{2}{3} (1, -2, 1) + (1, 0, -1) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

Le projeté orthogonal du vecteur $(1, 2, -1)$ sur le plan d'équation :

$$x + y + z = 0$$

est donc le vecteur :

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \right).$$

Exercice 19.17

Notons F le plan d'équation :

$$x - y + 2z = 0$$

et $v = (2, 1, 1)$. Alors :

$$F = \text{Vect}((1, -1, 2))^\perp,$$

donc :

$$F^\perp = \text{Vect}((1, -1, 2)).$$

Le vecteur $(1, -1, 2)$ forme une base de $F^\perp$ (qui est orthogonale puisqu'elle n'a

qu'un élément). Si l'on note p la projection orthogonale sur $F^\perp$, on a alors :

$$d(v, F) = \|p(v)\|,$$

et :

$$p(v) = \frac{\langle (1, -1, 2), (2, 1, 1) \rangle}{\|(1, -1, 2)\|^2} (1, -1, 2),$$

d'où :

$$d(v, F) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exercice 19.18

On écrit :

$$F = \{P, \langle P, Q \rangle = 0\},$$

où $Q = X^2 + X + 1$. On a donc :

$$F = (\text{Vect}(Q))^\perp,$$

d'où :

$$F^\perp = \text{Vect}(Q).$$

Notons p la projection orthogonale sur $\text{Vect}(Q)$ et $R = X^2 - 2$. Alors, comme Q est une base orthogonale de $\text{Vect}(Q)$, on a :

$$p(R) = \frac{\langle Q, R \rangle}{\|Q\|^2} Q = \frac{-1}{3} Q,$$

d'où :

$$d(R, F) = \|p(R)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$