

CHAPITRE 22

ALGEBRE GEOMETRIE

ESPACES EUCLIDIENS

I) Produit scalaire

1) Espace euclidien

d_1 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On appelle produit scalaire sur E toute application $(\mid)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- i) $\forall (x, y) \in E^2, (x \mid y) = (y \mid x),$
- ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in E^3, (x + \lambda y \mid z) = (x \mid z) + \lambda(y \mid z),$
- iii) $\forall x \in E, (x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E,$
- iv) $\forall x \in E, (x \mid x) \geq 0.$

Le réel $(x \mid y)$ s'appelle produit scalaire des vecteurs x et y .

Remarques

- $(x \mid y + \lambda z) = (y + \lambda z \mid x) = (y \mid x) + \lambda(z \mid x) = (x \mid y) + \lambda(x \mid z).$
 $(\mid)$ est une forme bilinéaire symétrique.
- Le produit scalaire de deux vecteurs x et y se note aussi $\langle x, y \rangle$ ou $x \cdot y$.

Exemples

- $E = \mathbb{R}^n$, soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

$(\mid)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Ce produit scalaire est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, soit $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2$, on pose $(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

$$(f \mid f) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f^2(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b], f^2(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b], f(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0_E.$$

$(\mid)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

- $E = \mathbb{R}_n[X]$, soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $(P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

$(\mid)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- $E = M_n(\mathbb{R})$, soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, on pose $(A \mid B) = \text{tr}({}^t A \times B)$.

On va montrer que $(\mid)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

- i) Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$,

$$(A \mid B) = \text{tr}({}^t A \times B) = \text{tr}[({}^t A \times B)] = \text{tr}({}^t B \times A) = (B \mid A).$$

- ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(A, B, C) \in M_n(\mathbb{R})^3$,

$$(A + \lambda B \mid C) = \text{tr}[({}^t(A + \lambda B) \times C)] = \text{tr}[({}^t A + \lambda {}^t B) \times C] = \text{tr}({}^t A \times C) + \lambda \text{tr}({}^t B \times C) = (A \mid C) + \lambda(B \mid C).$$

- iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = (a_{ij}), {}^t A = (a'_{ij}) \text{ avec } a'_{ij} = a_{ji}, {}^t A \times A = (b_{ij}), b_{ij} = \sum_{k=1}^n a'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$$

$$(A \mid A) = \text{tr}({}^t A \times A) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \right) = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ki}^2.$$

$$\text{Il vient : } (A \mid A) = 0 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ki}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ki} = 0 \Leftrightarrow A = 0_{M_n(\mathbb{R})}.$$

- iv) Corollaire du iii).

d₂ : Un espace euclidien est un couple $(E, (|))$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $(|)$ un produit scalaire sur E .

Remarque

Si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(|)$ un produit scalaire sur E , on dit que $(E, (|))$ est un espace préhilbertien.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

Muni du produit scalaire usuel, $(\mathbb{R}^n, (|))$ est un espace euclidien.

- $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension infinie.

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2, (f | g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

$(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), (|))$ est un espace préhilbertien.

- $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n+1$.

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, (P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

$(\mathbb{R}_n[X], (|))$ est un espace euclidien.

- $M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n^2 .

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, (A | B) = \text{tr}({}^t A \times B).$$

$(M_n(\mathbb{R}), (|))$ est un espace euclidien.

Th₁ : Inégalité de Schwarz

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(|)$, alors on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x | y)^2 \leq (x | x)(y | y).$$

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $T(\lambda) = (\lambda x + y | \lambda x + y)$.

$$T(\lambda) = \lambda^2(x | x) + \lambda(x | y) + \lambda(y | x) + (y | y) = (x | x)\lambda^2 + 2(x | y)\lambda + (y | y).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, T(\lambda) \geq 0 \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Rightarrow (x | y)^2 - (x | x)(y | y) \leq 0 \Rightarrow (x | y)^2 \leq (x | x)(y | y).$$

d₃ : Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien.

Soit $x \in E$, on pose $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

Remarque

On a la relation : $\forall (x, y) \in E^2, (x | y) \leq \|x\|\|y\|$.

Applications

- $E = \mathbb{R}^n$, $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $(|)$ est le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$.

$$\text{Inégalité de Schwarz} \rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $(f | g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

$$\text{Inégalité de Schwarz} \rightarrow \left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt \right) \left(\int_a^b g^2(t)dt \right).$$

p₁ : Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien, alors on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| : \text{inégalité triangulaire}.$$

Preuve

Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y | x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \Rightarrow \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

p₂ : Soit $(E, (\mid))$ un espace préhilbertien , alors $\| \cdot \| = \sqrt{(\mid)}$ est une norme sur E , c'est-à-dire :

- i) $\forall x \in E , \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,
- ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} , \forall x \in E , \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- iii) $\forall (x, y) \in E^2 , \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$: (inégalité triangulaire) .

Preuve

- i) Soit $x \in E , \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x \mid x)} = 0 \Leftrightarrow (x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,
- ii) Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E , \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)} = |\lambda| \sqrt{(x \mid x)} = |\lambda| \|x\|$,
- iii) C'est exactement la proposition 1 .

Remarque

Si $(E, (\mid))$ est un espace préhilbertien alors E est un espace vectoriel normé avec $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

d₄ : On appelle norme euclidienne une norme définie à l'aide du produit scalaire d'un espace euclidien .

Exemples de normes euclidiennes

- $(\mathbb{R}^n, (\mid)) , (x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \rightarrow \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
- $(\mathbb{R}_n[X], (\mid)) , (P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx \rightarrow \|P\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P(x)^2 dx}$.
- $(M_n(\mathbb{R}), (\mid)) , (A \mid B) = \text{tr}({}^t A \times B) \rightarrow \|A\| = \sqrt{\text{tr}({}^t A A)}$.

p₃ : On a les relations .

- i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$,
- ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)$,
- iii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$: identité du parallélogramme .

Preuve

- i) $\|x + y\|^2 = (x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$.

Corollaire

$\forall x \in E , (x \mid 0_E) = 0$, il suffit de faire $y = 0_E$ dans i) .

2) Orthogonalité dans les espaces euclidiens

Dans tout le paragraphe , $(E, (\mid))$ est un espace euclidien de dimension n .

d₅ : Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux lorsque $(x \mid y) = 0$, ce que l'on note $x \perp y$.

d₆ : Soit $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base de E .

- On dit que la base $\mathcal{B}$ est normée lorsque : $\forall i \in \{1, \dots, n\} , \|u_i\| = 1$.
- On dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale lorsque : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 , i \neq j , (u_i \mid u_j) = 0$.
- On dit que la base $\mathcal{B}$ est orthonormale ou orthonormée lorsqu'elle est orthogonale et normée .

Exemples

- $(\mathbb{R}^n, (\mid)) , (x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i : \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

- $(M_n(\mathbb{R}), (\mid)) , (A \mid B) = \text{tr}({}^t A \times B) : \|A\| = \sqrt{\text{tr}({}^t A A)}$.

La base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormale de $M_n(\mathbb{R})$.

En effet : $(E_{ij} \mid E_{kh}) = \text{tr}({}^t E_{ij} E_{kh}) = \text{tr}(E_{ji} E_{kh}) = \text{tr}(\delta_{ik} E_{jh}) = \delta_{ik} \text{tr}(E_{jh}) = \delta_{ik} \delta_{jh}$.

Si $(i, j) \neq (k, h)$ alors $(E_{ij} \mid E_{kh}) = 0$ sinon $\|E_{ij}\| = \sqrt{(E_{ij} \mid E_{ij})} = 1$.

p₄ : Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E .

Soit $(x, y) \in E^2 , x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors on a : $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Preuve

Il suffit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire .

Exemple

$\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$ avec $e'_1 = (1,1)$ et $e'_2 = (2,1)$, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $x = (3,2) = 3e_1 + 2e_2 = e'_1 + e'_2$.

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= (3e_1 + 2e_2 | 3e_1 + 2e_2) = 3^2 + 2^2 = 13 \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormale,} \\ &= (e'_1 + e'_2 | e'_1 + e'_2) = \|e'_1\|^2 + \|e'_2\|^2 + 2(e'_1 | e'_2) = 2 + 5 + 6 = 13.\end{aligned}$$

Conclusion

Pour tout calcul dans un espace euclidien, il est toujours plus intéressant de travailler avec une base orthonormale.

p₅ : Soit $(x, y) \in E^2$.

Les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Preuve

$$\|x + y\|^2 = (x + y | x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y).$$

Th₂ : Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille orthogonale de E , alors on a :

$$\text{i) } \left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

ii) Si de plus, aucun des vecteurs u_i n'est nul, la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ est libre.

Démonstration

$$\text{i) } \left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^p u_i \mid \sum_{i=1}^p u_i \right) = \sum_{i=1}^p (u_i \mid u_i) = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

$$\begin{aligned}\text{ii) Soit } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E &\Rightarrow \|\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 \|u_1\|^2 + \dots + \lambda_p^2 \|u_p\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}, \lambda_i = 0 \text{ donc la famille } \{u_1, \dots, u_p\} \text{ est libre.}\end{aligned}$$

d₇ : Soient A et B deux parties de E .

On dit que les parties A et B sont orthogonales lorsque $\forall x \in A, \forall y \in B, (x | y) = 0$.

d₈ : Soit A une partie de E .

On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$ et défini par $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, (x | a) = 0\}$.

p₆ : Soit A une partie de E , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve

$\forall a \in A, (0_E | a) = 0 \Rightarrow 0_E \in A^\perp$ donc $A^\perp$ est non vide.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(x, y) \in (A^\perp)^2$.

Soit $a \in A, (x + \lambda y | a) = (x | a) + \lambda(y | a) = 0 \Rightarrow x + \lambda y \in A^\perp$.

p₇ : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , alors on a :

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

Preuve

Soit $x \in G^\perp \Rightarrow \forall a \in G, (x | a) = 0 \Rightarrow \forall a \in F, (x | a) = 0 \Rightarrow x \in F^\perp$.

d₉ : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E lorsque $E = F \oplus G$ et $F \perp G$.

Exemple

$(M_n(\mathbb{R}), (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien, $(A | B) = \text{tr}({}^t AB)$.

$S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $M_n(\mathbb{R})$, en effet :

$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ est un résultat de cours, il reste à montrer que $S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, soit $B \in A_n(\mathbb{R})$,

$$(A | B) = \text{tr}({}^t AB) = \text{tr}(AB),$$

$$(B | A) = \text{tr}({}^t BA) = \text{tr}(-BA) = -\text{tr}(BA) = -\text{tr}(AB) = -(A | B) \Rightarrow (A | B) = 0 \Rightarrow A \perp B.$$

Th₃ : Existence de bases orthonormales

Tout espace euclidien $(E, (\cdot | \cdot))$ possède au moins une base orthonormale.

Démonstration

Par récurrence sur la dimension de E .

Soit pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$: tout espace euclidien de dimension n possède au moins une base orthonormale.

Etude de $\mathcal{P}(1)$:

Soit E un espace euclidien de dimension 1, il suffit de prendre pour base orthonormale un vecteur unitaire.

$\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$?

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Soient a un vecteur normé de E et $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x | a)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \varphi(x + \lambda y) = (x + \lambda y | a) = (x | a) + \lambda(y | a) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$ donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda a) = \lambda(a | a) = \lambda \|a\|^2 = \lambda$, on en déduit que φ est surjective donc $\text{Im} \varphi = \mathbb{R}$.

$\dim E = \dim \ker \varphi + \dim \text{Im} \varphi \Rightarrow \dim \ker \varphi = n - 1$.

$\ker \varphi = \{x \in E \mid (x | a) = 0\} = \text{Vect}(a)^\perp$ et $\dim \ker \varphi = n - 1$.

$\text{Vect}(a)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$, par hypothèse de récurrence $\text{Vect}(a)^\perp$ admet une base orthonormale $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$.

Enfin $\{a_1, \dots, a_{n-1}, a\}$ est une base orthonormale de E donc $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

p₈ : f est une forme linéaire sur E ssi il existe un unique vecteur a de E tel que pour tout x de E , $f(x) = (x | a)$.

Preuve

$(\Leftarrow)$: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x | a)$ est une forme linéaire sur E .

$(\Rightarrow)$: Unicité ?

Soient a_1 et a_2 deux solutions au problème

$\Rightarrow \forall x \in E, f(x) = (a_1 | x)$ et $\forall x \in E, f(x) = (a_2 | x) \Rightarrow \forall x \in E, (a_1 | x) = (a_2 | x)$

$\Rightarrow \forall x \in E, (a_1 - a_2 | x) = 0 \Rightarrow (a_1 - a_2 | a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0_E \Rightarrow a_1 = a_2$.

Existence ?

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E (il en existe).

Soit $x \in E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$.

On note $a = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i$.

Soit $x \in E, (x | a) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = f(x)$.

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Soit $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ une base de E .

On va transformer cette base pour obtenir une base $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_n\}$ orthogonale de E .

On pose $u_1 = b_1$.

$u_2 = b_2 + \alpha_{21} u_1$,

$(u_2 | u_1) = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{(b_2 | u_1)}{\|u_1\|^2}$.

$u_3 = b_3 + \alpha_{31} u_1 + \alpha_{32} u_2$,

$(u_3 | u_1) = 0 \Rightarrow \alpha_{31} = -\frac{(b_3 | u_1)}{\|u_1\|^2}$ et $(u_3 | u_2) = 0 \Rightarrow \alpha_{32} = -\frac{(b_3 | u_2)}{\|u_2\|^2}$.

$\vdots$

$u_n = b_n + \alpha_{n1} u_1 + \dots + \alpha_{n,n-1} u_{n-1}$,

$1 \leq k \leq n-1, (u_n | u_k) = 0 \Rightarrow \alpha_{nk} = -\frac{(b_n | u_k)}{\|u_k\|^2}$.

Exemples

- $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel.

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z - t = 0\}$, F est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.

Recherche d'une base orthonormale de F .

Soient $b_1 = (1, -1, 0, 0)$, $b_2 = (1, 0, -1, 0)$ et $b_3 = (1, 0, 0, 1)$, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de F .

On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base $\mathcal{B}$.

$$u_1 = b_1 \Rightarrow u_1 = (1, -1, 0, 0).$$

$$u_2 = b_2 + \alpha u_1, (u_2 | u_1) = 0 \Rightarrow (b_2 + \alpha u_1 | u_1) = 0 \Rightarrow (b_2 | u_1) + \alpha \|u_1\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{(b_2 | u_1)}{\|u_1\|^2} = -\frac{1}{2},$$

$$u_2 = b_2 - \frac{1}{2}u_1 = (1, 0, -1, 0) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right).$$

$$u_3 = b_3 + \beta u_1 + \gamma u_2,$$

$$(u_3 | u_1) = 0 \Rightarrow (b_3 + \beta u_1 + \gamma u_2 | u_1) = 0 \Rightarrow (b_3 | u_1) + \beta \|u_1\|^2 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{(b_3 | u_1)}{\|u_1\|^2} = -\frac{1}{2},$$

$$(u_3 | u_2) = 0 \Rightarrow (b_3 + \beta u_1 + \gamma u_2 | u_2) = 0 \Rightarrow (b_3 | u_2) + \gamma \|u_2\|^2 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{(b_3 | u_2)}{\|u_2\|^2} = -\frac{1/2}{3/2} = -\frac{1}{3},$$

$$u_3 = b_3 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{3}u_2 = (1, 0, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

$\tilde{\mathcal{B}} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthogonale de F .

$$\text{Soient } v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right) \text{ et } v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthonormale de F .

- $\mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

Recherche d'une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $1 \perp X$.

$$u_1 = 1, u_2 = X,$$

$$u_3 = X^2 + \alpha + \beta X, (u_3 | u_1) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{(b_3 | u_1)}{\|u_1\|^2} = \frac{\int_{-1}^1 t^2 dt}{\int_{-1}^1 dt} - \frac{1}{3}, (u_3 | u_2) = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{(b_3 | u_2)}{\|u_2\|^2} = 0, u_3 = X^2 - \frac{1}{3}.$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right\} \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_2[X].$$

Th₄ : Soit F un sous-espace vectoriel de E , alors $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration

On suppose que $\dim F = p$, $1 \leq p \leq n-1$ où $n = \dim E$.

$$F \cap F^\perp = \{0_E\} ?$$

$$\text{Soit } x \in F \cap F^\perp \Rightarrow x \in F \text{ et } x \in F^\perp \Rightarrow (x | x) = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp ?$$

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim(F + F^\perp) + \dim(F \cap F^\perp) = \dim(F + F^\perp) \leq \dim E.$$

Soit $\{b_1, \dots, b_p\}$ une b.o.n. de F (il en existe), on la complète par $b_{p+1}, \dots, b_n$ pour obtenir une base de E .

On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à $\{b_1, \dots, b_p, b_{p+1}, \dots, b_n\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$ b.o. de E .

$$\text{Soit } x \in F, x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p,$$

$$\text{soit } k \in \{p+1, \dots, n\}, (x | u_k) = 0,$$

$$\forall k \in \{p+1, \dots, n\}, u_k \in F^\perp \Rightarrow \dim F^\perp \geq n - p \Rightarrow \dim E \leq \dim F + \dim F^\perp.$$

Example

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel, soit $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$.

Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$, c'est-à-dire F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $F^\perp = \text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$, en effet : $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp \Rightarrow \dim F^\perp = n - (n-1) = 1$ et $(a_1, \dots, a_n) \in F^\perp$.

3) Orientation d'un espace euclidien

a) Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n (non nécessairement euclidien).

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} e'_1 & \cdots & e'_n \\ & & e_1 \\ & & \vdots \\ & & e_n \end{bmatrix}, P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ donc } \det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \neq 0.$$

d_{10} : Orienter le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , c'est choisir une base $\mathcal{B}$, on dit que $\mathcal{B}$ définit l'orientation de E .

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E , si $\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} > 0$, on dit que $\mathcal{B}'$ est une base directe ou positive et dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{B}'$ est une base indirecte ou négative.

Remarque

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel orienté par la base $\mathcal{B}$.

$\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \det I = 1 > 0$ donc $\mathcal{B}$ est une base directe.

Example

Soit $E = \mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique $\mathcal{B}$.

Soient $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (1, 0, 1)$ et $b_3 = (-1, 1, 2)$, $\mathcal{B}' = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\det P_{\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \text{ donc la base } \mathcal{B}' \text{ est indirecte.}$$

b) Orientation d'un espace euclidien

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien.

d_{11} : Orienter l'espace euclidien E , c'est choisir une base orthonormée $\mathcal{B}$.

On dit que E est orienté par la b.o.n. $\mathcal{B}$ ou que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe (b.o.n.d.) de E .

Remarque

Dans la pratique , $\mathbb{R}^n$ est orienté par sa base canonique .

$\mathbb{R}^2$ est orienté par sa base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

4) Projecteurs orthogonaux

Rappel

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $pop = p$.

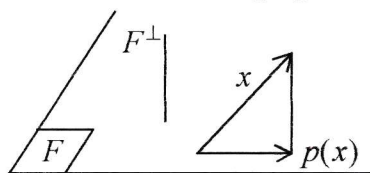
Si p est un projecteur de E alors $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$, $\ker p = \{x \in E / p(x) = 0_E\}$ et $\operatorname{Im} p = \{x \in E / p(x) = x\}$.

On dit que p est la projection sur $F = \text{Im } p$ de direction $G = \text{ker } p$.

d_{12} : Soit p un projecteur de E : $p \in \mathcal{L}(E)$ et $pop = p$.

On dit que p est un projecteur orthogonal lorsque $\text{Im } p \perp \text{ker } p$.

Dans ce cas, on dit que p est la projection orthogonale sur $\text{Im } p$.



$$F = \text{Im } p = \{x \in E \mid p(x) = x\}, \quad G = F^\perp = \ker p = \{x \in E \mid p(x) = 0_E\}.$$

p₉ : Soit p un projecteur de E , alors p est un projecteur orthogonal ssi $\forall (x, y) \in E^2, (p(x)|y) = (x|p(y))$.

Preuve

$(\Rightarrow)$: Soit $(x, y) \in E^2$.

$$E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p, \exists (x_1, x_2) \in \ker p \times \operatorname{Im} p / x = x_1 + x_2 \text{ et } \exists (y_1, y_2) \in \ker p \times \operatorname{Im} p / y = y_1 + y_2.$$

$$(p(x)|y) = (x_2|y_1 + y_2) = (x_2|y_2) \text{ et } (x|p(y)) = (x_1 + x_2|y_2) = (x_2|y_2).$$

$(\Leftarrow)$: Soit $(x, y) \in \ker p \times \operatorname{Im} p$.

$$(x|y) = (x|p(y)) = (p(x)|y) = (0_E|y) = 0 \Rightarrow x \perp y.$$

p₁₀ : Soient F un sous-espace vectoriel de E et $\{b_1, \dots, b_p\}$ une base orthonormale de F .

Soit $x \in E$, alors le projeté orthogonal de x sur F est égal à $\sum_{i=1}^p (x|b_i)b_i$.

Preuve

Soit $\{b_{p+1}, \dots, b_n\}$ une base orthonormale de $F^\perp$.

Puisque $E = F \oplus F^\perp$, $\{b_1, \dots, b_p, b_{p+1}, \dots, b_n\}$ est une base orthonormale de E .

Soit $x \in E$, $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p + \lambda_{p+1} b_{p+1} + \dots + \lambda_n b_n$.

On note p_F la projection orthogonale sur F .

$$p_F(x) = p_F(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p + \lambda_{p+1} b_{p+1} + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p.$$

D'autre part, pour $1 \leq i \leq p$, $(x|b_i) = (\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_p b_p + \lambda_{p+1} b_{p+1} + \dots + \lambda_n b_n|b_i) = \lambda_i$ d'où le résultat.

Corollaires

• Soit D une droite vectorielle engendrée par un vecteur unitaire u .

Soit $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur D est égal à $(x|u)u$.

• Soit P un plan vectoriel engendré par une base orthonormale $\{u, v\}$.

Soit $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur P est égal à $(x|u)u + (x|v)v$.

d₁₃ : Soient $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E .

On appelle distance de x à F le réel noté $d(x, F)$ et défini par $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Remarques

• $\{\|x - y\|, y \in F\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ donc la borne inférieure est bien définie.

• Si $x \in F$ alors $d(x, F) = 0$.

p₁₁ : Soient $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E .

On note p_F la projection orthogonale sur F , alors on a $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Preuve

p_F est la projection orthogonale sur F , c'est-à-dire la projection sur F de direction $F^\perp$.

On a : $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Soit $y \in F$,

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \text{ car } x - p_F(x) \in F^\perp \text{ et } p_F(x) - y \in F.$$

On obtient : $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \inf_{y \in F} \sqrt{\|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2} = \|x - p_F(x)\|$.

II) Transformations orthogonales

1) Généralités

Pour tout le paragraphe, $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien de dimension n (par exemple $E = \mathbb{R}^n$).

d₁ : Soit f un endomorphisme de E : $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que f est une transformation orthogonale lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y) : \text{conservation du produit scalaire.}$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales de E .

p_1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est une transformation orthogonale (conservation du produit scalaire) si et seulement si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$: conservation de la norme .

Preuve

($\Rightarrow$) : Il suffit de faire $x = y$ dans l'hypothèse .

($\Leftarrow$) : Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\|f(x+y)\|^2 = \|f(x) + f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2(f(x) | f(y)) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(f(x) | f(y)) ,$$

$$\|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y) ,$$

on a donc $(f(x) | f(y)) = (x | y)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{O}(E)$.

p_2 : Une transformation orthogonale est un automorphisme , c'est-à-dire $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{G}(E)$.

Preuve

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

Soit $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

$\ker f = \{0_E\}$ donc l'endomorphisme f est injectif et par suite f est bijectif car E est de dimension finie .

p_3 : $(\mathcal{O}(E), o)$ est un groupe appelé groupe orthogonal .

Preuve

On va montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G}(E), o)$.

$Id_E \in \mathcal{O}(E)$ donc $\mathcal{O}(E)$ est non vide .

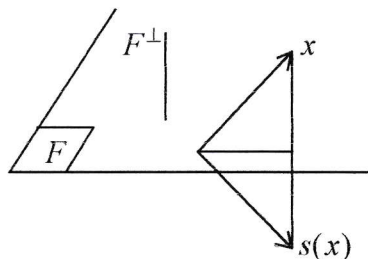
Soit $(f, g) \in \mathcal{O}(E)^2$.

Soit $x \in E$, $\|(fog^{-1})(x)\| = \|f[g^{-1}(x)]\| = \|g^{-1}(x)\| = \|x\|$ donc $fog^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

d_2 : Soit F un sous-espace vectoriel de E .

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une réflexion .



s est la symétrie orthogonale par rapport à F .

$F = \{x \in E / s(x) = x\}$ et $G = F^\perp = \{x \in E / s(x) = -x\}$.

Th_1 : Soit $s \in \mathcal{L}(E)$, alors :

s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est une symétrie et $s \in \mathcal{O}(E)$.

Démonstration

($\Rightarrow$) : On suppose que s est la symétrie orthogonale par rapport à F .

On a $E = F \oplus F^\perp$.

Soit $x \in E$, $\exists (y, z) \in F \times F^\perp / x = y + z$.

$$\|s(x)\|^2 = \|s(y+z)\|^2 = \|y-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 - 2(y | z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 \text{ et}$$

$$\|x\|^2 = \|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2(y | z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 , \text{ on a donc } \|s(x)\| = \|x\| , \text{ c'est-à-dire } s \in \mathcal{O}(E) .$$

($\Leftarrow$) : On suppose que s est la symétrie par rapport à F de direction G .

$F = \{x \in E / s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E / s(x) = -x\}$.

Soit $(x, y) \in F \times G$, $(x | y) = (s(x) | -s(y)) = -(s(x) | s(y)) = -(x | y) \Rightarrow (x | y) = 0 \Rightarrow x \perp y$ donc $F \perp G$.

Exemples

- Id_E et $-Id_E$ sont des transformations orthogonales .
- Les symétries orthogonales sont des transformations orthogonales .
- Attention , une projection orthogonale n'est pas une transformation orthogonale .

p₄ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est une transformation orthogonale si et seulement si f transforme une b.o.n. de E en une b.o.n. de E .

Preuve

($\Rightarrow$) : Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une b.o.n. de E .

$f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow f \in \mathcal{U}(E) \Rightarrow f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de E .

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|f(b_i)\| = \|b_i\|$,

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, $(f(e_i) | f(e_j)) = (e_i | e_j) = 0$,

on en déduit que $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n. de E .

($\Leftarrow$) : Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une b.o.n. de E .

Par hypothèse $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n. de E .

Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$\|f(x)\|^2 = (f(x) | f(x)) = (f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) | f(\sum_{i=1}^n x_i e_i)) = (\sum_{i=1}^n x_i f(e_i) | \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2 ,$$

on en déduit que $f \in \mathcal{O}(E)$.

2) Matrices orthogonales

Pour tout le paragraphe , $(E, (|))$ est un espace euclidien de dimension n (par exemple $E = \mathbb{R}^n$) et

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une b.o.n. de E .

p₅ : Soit $(x, y) \in E^2$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, $X = x/\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = y/\mathcal{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

On a la relation : $(x | y) = {}^tXY$.

Preuve

$$\begin{aligned} (x | y) &= (\sum_{i=1}^n x_i e_i | \sum_{i=1}^n y_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ car } \mathcal{B} \text{ est une b.o.n. de } E \\ &= {}^tXY . \end{aligned}$$

p₆ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est une transformation orthogonale si et seulement si sa matrice M exprimée par rapport à la b.o.n. $\mathcal{B}$ vérifie la relation ${}^tMM = I$.

Preuve

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(E) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 , (f(x) | f(y)) = (x | y) \\ &\Leftrightarrow \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 , {}^t(MX)MY = {}^tXY \\ &\Leftrightarrow \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 , {}^tX({}^tMM)Y = {}^tXY \\ &\Leftrightarrow {}^tMM = I . \end{aligned}$$

Remarques

- ${}^tMM = I \Leftrightarrow M^tM = I$, en effet :

puisque ${}^tMM = I$, la matrice M est inversible et de plus $M^{-1} = {}^tM$.

$${}^tMM = I \Leftrightarrow M({}^tMM)M^{-1} = MM^{-1} \Leftrightarrow M^tM = I .$$

- La matrice M d'une symétrie orthogonale s par rapport à une b.o.n. est symétrique , en effet :

$$sos = Id_E \Rightarrow M^2 = I , s \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow {}^tMM = I .$$

$${}^tMM = M^2 \Rightarrow {}^tM = M \text{ donc la matrice } M \text{ est symétrique .}$$

Attention , la matrice d'une symétrie non orthogonale n'est pas forcément symétrique .

- La matrice M d'une projection orthogonale p par rapport à une b.o.n. est symétrique , en effet :

$$\forall (x, y) \in E^2 , (p(x) | y) = (x | p(y)) \Rightarrow \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 , {}^t(MX)Y = {}^tX(MY)$$

$$\Rightarrow \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 , {}^tX{}^tMY = {}^tXMY \Rightarrow {}^tM = M \text{ donc la matrice } M \text{ est symétrique .}$$

Attention , la matrice d'une projection non orthogonale n'est pas forcément symétrique .

Attention , une projection orthogonale n'est pas une transformation orthogonale .

Th₂ : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) f conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) | f(y)) = (x | y)$,
- ii) f conserve la norme : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$,
- iii) $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n. de E ,
- iv) $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ vérifie la relation ${}^tMM = I$.

Démonstration

Il suffit d'utiliser les propositions p_1 , p_4 et p_6 .

d₃ : On note $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I\}$.

$O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices provenant des transformations orthogonales.

$O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales.

p₇ : $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe appelé groupe orthogonal.

Preuve

On va montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

${}^tII = I \Rightarrow I \in O_n(\mathbb{R})$ donc $O_n(\mathbb{R})$ est non vide.

Soit $(A, B) \in O_n(\mathbb{R})^2$,

${}^t(AB^{-1})(AB^{-1}) = {}^t(B^{-1}){}^tAAB^{-1} = ({}^tB)^{-1}B^{-1} = (B{}^tB)^{-1} = I^{-1} = I \Rightarrow AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

$O_n(\mathbb{R})$ est donc un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

p₈ : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

On note $V_1, \dots, V_n$ les vecteurs colonnes de la matrice M , alors :

$f \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si les vecteurs $V_1, \dots, V_n$ sont deux à deux orthogonaux et normés.

Preuve

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = V_i$.

$f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une b.o.n. de $E \Leftrightarrow \{V_1, \dots, V_n\}$ est une b.o.n.

Corollaire

Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ une b.o.n. de E .

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors P est une matrice orthogonale et $P^{-1} = {}^tP$.

p₉ : Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det f = \pm 1$.

Preuve

Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$, on a $\det f = \det M$.

$f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tMM = I \Rightarrow \det({}^tMM) = \det I \Rightarrow (\det M)^2 = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1 \Rightarrow \det f = \pm 1$.

d₄ : On note $\mathcal{SO}(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) / \det f = 1\}$ et $\mathcal{O}^-(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) / \det f = -1\}$.

On note $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = 1\}$ et $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = -1\}$.

Les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont appelés des rotations.

Remarques

- La b.o.n. $\mathcal{B}$ étant fixée :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \leftrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{U}(E) \leftrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{O}(E) \leftrightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{SO}(E) \leftrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{O}^-(E) \leftrightarrow O_n^-(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \end{array} \right\} \text{bijections}$$

- $(\mathcal{SO}(E), o)$ est un groupe appelé groupe spécial orthogonal.

Exemples de matrices

- $M_n(\mathbb{R})$

Structure : $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n^2 .

$(M_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif non intègre.

- $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \det M \neq 0\}$

Structure : $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif : groupe linéaire.

- $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^t M = M\}$ et $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^t M = -M\}$

Structure : $(S_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

$(A_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}).$$

- $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^t M M = I\}$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = 1\}$

Structure : $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif : groupe orthogonal.

$(SO_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif si $n \geq 3$: groupe spécial orthogonal.

III) Classification des transformations orthogonales

1) Classification en dimension 1

$(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien de dimension 1.

p_1 : On a $\mathcal{O}(E) = \{Id_E, -Id_E\}$.

Preuve

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

Soit $\{e\}$ une base de E , $\exists \alpha \in \mathbb{R} / f(e) = \alpha e$.

Soit $x \in E$, $\exists \lambda \in \mathbb{R} / x = \lambda e$, $f(x) = f(\lambda e) = \lambda f(e) = \lambda \alpha e = \alpha x$.

$f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| \Rightarrow \forall x \in E, \|\alpha x\| = \|x\| \Rightarrow \forall x \in E, |\alpha| \|x\| = \|x\| \Rightarrow |\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$,

on en déduit que $f = \pm Id_E$.

2) Classification en dimension 2

a) Etude des matrices orthogonales

$$O_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / {}^t M M = I\}.$$

On introduit les matrices $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $S_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

p_2 : On a : $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\varphi, \varphi \in \mathbb{R}\}$, $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ et $O_2^-(\mathbb{R}) = \{S_\varphi, \varphi \in \mathbb{R}\}$.

Preuve

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, M \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t M M = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}.$$

On suppose $b \neq 0$, $ac + bd = 0 \Rightarrow d = -\frac{ac}{b}$, $c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow c^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2} = 1 \Rightarrow c^2 = b^2 \Rightarrow c = \pm b$.

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi[/ a = \cos \alpha \text{ et } b = \sin \alpha.$$

$$c = \pm b = \varepsilon b \text{ où } \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

$$ac + bd = 0 \Rightarrow a \varepsilon b + b d = 0 \Rightarrow d = -a \varepsilon.$$

$$\text{Si } \varepsilon = 1 \text{ alors } M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = S_\alpha \text{ et si } \varepsilon = -1 \text{ alors } M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = R_\alpha.$$

$$\det R_\theta = 1 \Rightarrow R_\theta \in SO_2(\mathbb{R}), \det S_\varphi = -1 \Rightarrow S_\varphi \in O_2^-(\mathbb{R}).$$

b) Etude des transformations orthogonales

$(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien de dimension 2 orienté par la b.o.n. $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{O}(E) \leftrightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{SO}(E) \leftrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{O}^-(E) \leftrightarrow O_n^-(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \text{ bijections}$$

$$f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$$

Parmi la classification, on doit trouver Id_E , $-Id_E$ et s_D .

• Etude de $\mathcal{SO}(E)$:

$$\text{Soit } f \in \mathcal{SO}(E) \Rightarrow M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in SO_2(\mathbb{R}) \Rightarrow M = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[.$$

Si $\theta = 0$, $M = I \Rightarrow f = Id_E$.

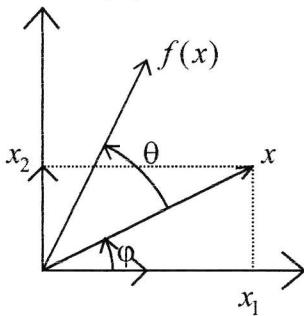
On suppose que $\theta \in]0, 2\pi[$.

Soit $x \in E$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $f(x) = y_1 e_1 + y_2 e_2$.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ y_2 = x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{cases}$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \|x\| \left(\frac{x_1}{\|x\|} e_1 + \frac{x_2}{\|x\|} e_2 \right) = \|x\| \cos\varphi e_1 + \|x\| \sin\varphi e_2.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= y_1 e_1 + y_2 e_2 = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta) e_1 + (x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta) e_2 \\ &= \|x\| (\cos\varphi \cos\theta - \sin\varphi \sin\theta) e_1 + \|x\| (\cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi \cos\theta) e_2 \\ &= \|x\| \cos(\varphi + \theta) e_1 + \|x\| \sin(\varphi + \theta) e_2. \end{aligned}$$



On dit que f est une rotation d'angle ayant pour mesure θ , $\theta = \widehat{(x, f(x))} [2\pi]$.

d₁ : Soit $\theta \in]0, 2\pi[$.

La rotation vectorielle d'angle θ est l'endomorphisme r_θ de E caractérisé par :

$$\forall x \in E, \text{ le vecteur } r_\theta(x) \text{ est défini par } \begin{cases} \|r_\theta(x)\| = \|x\| \\ \widehat{(x, r_\theta(x))} = \theta [2\pi] \end{cases}.$$

Remarques

Seul le vecteur nul est invariant par une rotation vectorielle.

Si $\theta = \pi$ alors $r_\pi = -Id_E$.

• Etude de $\mathcal{O}^-(E)$:

$$\text{Soit } f \in \mathcal{O}^-(E) \Rightarrow M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in O_2^-(\mathbb{R}) \Rightarrow M = S_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi[.$$

$$S_\varphi^2 = I \Rightarrow f \circ f = Id_E \text{ donc } f \text{ est une symétrie.}$$

L'endomorphisme f est une symétrie et $f \in \mathcal{O}(E)$ donc f est une symétrie orthogonale.

$$F = \{x \in E \mid f(x) = x\}.$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2, f(x) = x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \lambda \left(\cos\frac{\varphi}{2} e_1 + \sin\frac{\varphi}{2} e_2 \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a donc $F = \text{Vect}(\cos\frac{\varphi}{2} e_1 + \sin\frac{\varphi}{2} e_2)$ et $f = s_F$: symétrie orthogonale par rapport à F .

Th₁ : $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien orienté de dimension 2.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, on note $F = \{x \in E / f(x) = x\}$, F est un sous-espace vectoriel de E .

Suivant la dimension de F , on obtient pour f :

$\mathcal{O}(E)$	$\mathcal{SO}(E)$	$\mathcal{O}^-(E)$
$\dim F = 2$	Id_E	
$\dim F = 1$		s_F
$\dim F = 0$	$r_\theta, \theta \in]0, 2\pi[$	

c) Compléments

p₃ : On a les relations :

i) $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$,

ii) $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$,

iii) $S_\varphi \times S_{\varphi'} = R_{\varphi-\varphi'}$.

Preuve

$$\begin{aligned} \text{i) } R_\theta \times R_{\theta'} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{bmatrix} = R_{\theta+\theta'}. \end{aligned}$$

$$\text{ii) } (R_\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = {}^t \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R_{-\theta}.$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } S_\varphi \times S_{\varphi'} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi' & \sin\varphi' \\ \sin\varphi' & -\cos\varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi' & \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi' \\ \sin\varphi\cos\varphi' - \cos\varphi\sin\varphi' & \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi-\varphi') & -\sin(\varphi-\varphi') \\ \sin(\varphi-\varphi') & \cos(\varphi-\varphi') \end{bmatrix} = R_{\varphi-\varphi'}. \end{aligned}$$

Corollaires

• Le groupe $(\mathcal{SO}(E), \circ)$ est commutatif, en effet :

$$R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta} = R_{\theta'} \times R_\theta.$$

• Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une réflexion.

$R_\theta = S_\varphi \times S_{\varphi-\theta}$ donc toute rotation vectorielle est le produit de deux réflexions et la première des deux réflexions peut être choisie arbitrairement.

p₄ : Soient a et b deux vecteurs non nuls de E , on note $\theta = (\widehat{a, b}) [2\pi]$, alors on a les relations :

$$(a | b) = \|a\| \|b\| \cos\theta \text{ et } \det(a, b) = \|a\| \|b\| \sin\theta.$$

Preuve

$$(a | b) = \|a\| \|b\| \cos\theta : \text{ déjà vu. }$$

$$\text{Soient } a' = \frac{a}{\|a\|} \text{ et } b' = \frac{b}{\|b\|}, \theta = (\widehat{a, b}) = (\widehat{a', b'}) [2\pi].$$

On note r_θ la rotation vectorielle d'angle θ .

$$a' = a'_1 e_1 + a'_2 e_2, \quad b' = b'_1 e_1 + b'_2 e_2, \quad b' = r_\theta(a') \Rightarrow \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b'_1 = \cos\theta a'_1 - \sin\theta a'_2 \\ b'_2 = \sin\theta a'_1 + \cos\theta a'_2 \end{cases}.$$

$$\frac{1}{\|a\| \|b\|} \det(a, b) = \det\left(\frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|}\right) = \det(a', b') = \begin{vmatrix} a'_1 & \cos\theta a'_1 - \sin\theta a'_2 \\ a'_2 & \sin\theta a'_1 + \cos\theta a'_2 \end{vmatrix} = \sin\theta (a_1'^2 + a_2'^2) = \sin\theta.$$

p₅ : Soient r_θ la rotation vectorielle d'angle θ et a un vecteur unitaire de E .

On a les relations : $(a | r_\theta(a)) = \cos\theta$ et $\det(a, r_\theta(a)) = \sin\theta$.

Preuve

Il suffit de remarquer que $(\widehat{a, r_\theta(a)}) = \theta [2\pi]$ et utiliser la proposition précédente.

3) Classification en dimension 3

a) Préliminaires

$(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien de dimension 3 orienté par la b.o.n. $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

On note toujours $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$, F est un sous-espace vectoriel de E .

$$E = F \oplus F^\perp : \forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times F^\perp / x = y + z.$$

$$f(x) = f(y + z) = f(y) + f(z) = y + f(z).$$

p₆ : Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

i) $F^\perp$ est stable par f .

ii) La restriction de f à $F^\perp$ est une transformation orthogonale de $F^\perp$ dont le seul vecteur invariant est le vecteur nul.

Preuve

i) Soit $x \in F^\perp$.

$$\text{Soit } y \in F, (f(x) | y) = (f(x) | f(y)) = (x | y) = 0 \Rightarrow f(x) \in F^\perp.$$

ii) $f|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow F^\perp$
 $x \mapsto f(x)$.

$f \in \mathcal{L}(E)$ et $F^\perp$ est stable par f donc f est un endomorphisme de $F^\perp$.

$$f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow f|_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp).$$

$$\text{Soit } x \text{ invariant par } f|_{F^\perp} \Rightarrow x \in F^\perp \text{ et } f(x) = x \Rightarrow x \in F^\perp \text{ et } x \in F \Rightarrow x \in F \cap F^\perp \Rightarrow x = 0_E.$$

La classification s'effectue suivant la dimension des vecteurs invariants.

Remarques

• Si $\dim F = 3$ alors $F = E$ donc $f = Id_E$.

$$\det Id_E = \det I = 1 \Rightarrow f \in \mathcal{SO}(E).$$

• Parmi la classification, on doit trouver Id_E , $-Id_E$, S_D et S_P .

b) Etude lorsque $\dim F = 2$

$\dim F = 2$, F est un plan vectoriel : $F = P$.

$F^\perp = D$: droite vectorielle.

$f|_D \in \mathcal{O}(D)$ avec pour seul vecteur invariant le vecteur nul donc $f|_D = -Id_D$.

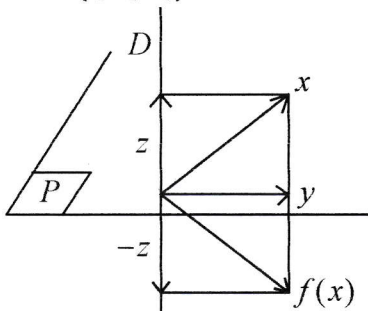
Soit $x \in E$, $x = y + z$, $y \in P$, $z \in D$, $f(x) = f(y + z) = f(y) + f(z) = y - z$.

f est la symétrie orthogonale par rapport à P : $f = S_P$.

f est donc une réflexion.

Soient $\{b_1, b_2\}$ une base de P et $b_3 = b_1 \wedge b_2$, $b_3 \in D$.

$\mathcal{B}' = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de E .



$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \det M' = -1 \Rightarrow f \in \mathcal{O}^-(E).$$

c) Etude lorsque $\dim F = 1$

$\dim F = 1$, F est une droite vectorielle : $F = D$.

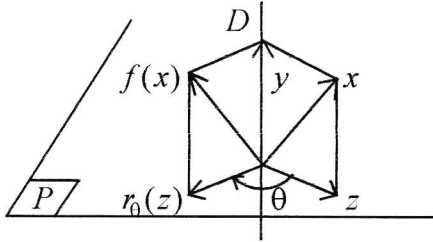
$F^\perp = P$: plan vectoriel.

$f|_P \in \mathcal{O}(P)$ avec pour seul vecteur invariant le vecteur nul.

On oriente le plan vectoriel P en fixant une b.o.n. $\{b_1, b_2\}$ de P .

$f|_P = r_\theta$, $\theta \in]0, 2\pi[$.

Soit $x \in E$, $x = y + z$, $y \in D$, $z \in P$, $f(x) = f(y + z) = f(y) + f(z) = y + r_\theta(z)$.



d_2 : On dit que f est une rotation d'axe D et d'angle ayant pour mesure θ , $f = r_{(D, \theta)}$.

Soient $\{b_1, b_2\}$ une b.o.n. de P et $b_3 = b_1 \wedge b_2$, $b_3 \in D$.

$\mathcal{B}' = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une b.o.n. directe de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = M' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det M' = 1 \Rightarrow f \in \mathcal{SO}(E).$$

Remarques

• Si $\theta = \pi$, f est la symétrie orthogonale par rapport à D : $r_{(D, \pi)} = s_D$.

On dit aussi que f est un retournement ou un demi-tour vectoriel.

• Méthode pour calculer la mesure de l'angle θ :

On calcule la droite vectorielle D , on en déduit l'orthogonal de D , c'est un plan vectoriel P .

On oriente le plan vectoriel P en fixant une b.o.n. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ de P .

$$(b_1 | f(b_1)) = \|b_1\| \|f(b_1)\| \cos(\widehat{b_1, f(b_1)}) = \cos \theta,$$

$$(b_2 | f(b_1)) = \|b_2\| \|f(b_1)\| \cos(\widehat{b_2, f(b_1)}) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta.$$

A l'aide de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$, on détermine une mesure de l'angle θ .

d) Résumé

Th_2 : $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, on note $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$, F est un sous-espace vectoriel de E .

Suivant la dimension de F , on obtient pour f :

$\mathcal{O}(E)$	$\mathcal{SO}(E)$	$\mathcal{O}^-(E)$
$\dim F = 3$	Id_E	
$\dim F = 2$		s_P
$\dim F = 1$	$r_{(D, \theta)}$, $\theta \in]0, 2\pi[$	
$\dim F = 0$		$r_{(D, \theta)} \circ s_{D^\perp}$, $\theta \in]0, 2\pi[$

Remarques

• Pour $\theta = \pi$, $r_{(D, \pi)} = s_D$.

• $r_{(D, \theta)} \circ s_{D^\perp} = s_{D^\perp} \circ r_{(D, \theta)}$ et pour $\theta = \pi$, $r_{(D, \pi)} \circ s_{D^\perp} = s_D \circ s_{D^\perp} = -Id_E$.