

DEVOIR SURVEILLÉ N°6

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère également l'application g définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$

Enfin, on pose : $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = f(e_1) + e_1$

1. a. Calculer v .
 - 1.b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - 1.c. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} .
 2. a. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.
 - 2.b. En déduire les valeurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable?
 - 2.c. L'endomorphisme f est-il bijectif?
 - 2.d. Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1} .
 - 3.a. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
 - 3.b. Déterminer une base de $\ker(g)$.
 - 3.c. Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(g)$.
 - 3.d. Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
 - 3.e. Montrer : $B^2 = 2B$
 - 3.f. En déduire les valeurs propres de B , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
 - 3.g. La matrice B est-elle diagonalisable?
- On pose :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / BM = MA\}$$

4. a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
- 4.b. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. (On pourra raisonner par l'absurde).
5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0_3\}$.
- 5.a. Justifier que, pour tout réel λ , les matrices $A - \lambda I_3$ et ${}^tA - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5.b. En déduire que les matrices B et tA admettent une valeur propre en commun, notée α .
- 5.c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α , et Y un vecteur propre de tA associé à la valeur propre α .
On note : $N = X {}^tY$
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.
- 5.d. En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que :

$$0 < a < 1 < b$$

3. Montrer : $b \in [2; 4]$ On donne : $\ln(2) \approx 0,7$

PARTIE II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b; +\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2} (u_n - b)$

6.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

7. a. Écrire une fonction Python d'en-tête **def suite (n)** qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n .

7.b. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à epsilon près.

```
def valeur_app(epsilon):
    n=0
    while .....
        n=n+1
    return suite(n)
```

PARTIE III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, et que l'on a : $\forall x \in]0; +\infty[, \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0; +\infty[$.

10. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x$

11. a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0 .

On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

11.b. Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$

11.c. Montrer que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que : $\Phi'(0) = 0$

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 .

Exercice 3

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

PARTIE A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V .

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $] -\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

1. a. Justifier : $\forall t \in [0; +\infty[, 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$

1.b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt = P([U \leq V])$$

2. En déduire : $P([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t) dt$.

3. Exemple : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ .

3.a. Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

3.b. En déduire : $P([U > V]) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ . On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.

4.a. Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $P([M_n > t])$.

4.b. En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.

Reconnaître la loi de M_n et préciser son(s) paramètre(s).

5. a. Montrer : $P([N = 1]) = P([T_1 \leq T_0]) = \frac{1}{2}$

5.b. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, [N > n] = [M_n > T_0]$

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $P([N > n])$ en fonction de n .

5.c. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P([N = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$

5.d. En déduire la valeur de $P([N = 0])$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance?