

DEVOIR SURVEILLÉ

Exercice 1

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ d'ordre $n \geq 3$.

Exercice 2

Partie I. Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs ≥ 0 .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre W_{n+1} et W_{n-1} . En déduire que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq nW_n^2 \leq \frac{\pi}{2}$

En déduire un équivalent simple de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie II. Formule de Stirling.

On pose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5. (a) Montrer que : $\ln \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} \right) \sim \frac{-1}{12n^2}$

(b) En utilisant le fait que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell > 0$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \pi$

7. Montrer la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$

Exercice 3

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Écrire sous forme développée P_1 et P_2 et donner leur factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $P_n = XQ_n$, où Q_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n n'admet que des racines simples.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines complexes de P_n (on les mettra sous forme exponentielle).
5. Montrer que le produit des racines non nulles de P_n est égal à $-2n$.
6. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$.

Exercice 4

On considère, dans cet exercice, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. a. Montrer que : $\forall t \in [0, 1], \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$

b. En déduire que : $\forall n \geq 1, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \exp\left(1 - \frac{1}{4n}\right)$

2. a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \exp\left(-\frac{1}{4n}\right)$

b. En considérant le produit $p_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n \leq \exp\left(-1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$

3. a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

b. En déduire : $\forall n \geq 1, u_n \leq \exp\left(-1 - \frac{1}{4} \ln(n)\right)$

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?