

DEVOIR SURVEILLÉ N°4.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités, dans la mesure du possible, à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel informatique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Les parties A, B et C de cet exercice sont mutuellement indépendantes.

Partie A : Étude d'une matrice carrée d'ordre 2.

On considère la matrice A définie par : $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

1. Déterminer A^2 .
2. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
3. Calculer $f(e_1)$. Montrer que la famille $(e_1, f(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer une matrice T , triangulaire et semblable à A .

Partie B : Étude d'un endomorphisme.

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = (1 - X - X^2) P' + \frac{1}{2} (-1 - X + 3X^2 + 2X^3) P''$$

On note :

- $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$;
 - θ l'endomorphisme nul de E , i l'endomorphisme identité de E .
5. Montrer que f est un endomorphisme de E .
 6. Déterminer la matrice F canoniquement associée à f . Sans aucun calcul, déterminer une valeur propre de f .
 7. Déterminer le rang de f .
 8. Déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$.
 9. Montrer que : $f \circ f = \theta$
 10. Déterminer le spectre de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
 11. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (P_1, f(P_1), P_0)$ est une base de E .
 12. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
 13. Déterminer la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$.

Partie C : Un cas plus général.

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.

θ, i désignent respectivement l'endomorphisme nul et l'endomorphisme identité de E .

On considère dans la suite un endomorphisme f de E tel que : $f \neq \theta$

14. Montrer que : $f \circ f = \theta \iff \text{Im}(f) \subset \ker(f)$

On suppose dans les questions suivantes que : $f \circ f = \theta$

15. (a) Comparer le rang de f à la dimension de $\ker(f)$.
(b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux sous-espaces.
16. Montrer l'existence d'un élément u de E tel que : $f(u) \neq 0_E$
17. Soit v un élément de $\ker(f) \setminus \text{Im}(f)$.
(a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\ker(f)$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E .
(c) Déterminer la matrice T de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Exercice 2.

Ce problème se compose de trois parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement et il pourra pour la suite admettre ce résultat.

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n .

On tire une boule au hasard dans U_n et on note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$) et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à obtention de la boule numéro 1.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.

On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.

Partie A : Étude liminaire.

1. On pose :
$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(a) Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

(b) En déduire que :
$$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$$

(c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose :
$$k_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Expliquer la raison pour laquelle la suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

En déduire un équivalent simple de $h_n - k_n$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Partie B : Simulation informatique.

3. Nous rappelons le fait que :

- ★ la commande `<>` signifie "différent de" en Scilab ;
- ★ `grand(1,1,"uin",a,b)` simule une réalisation d'une variable suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$.

Compléter la fonction Scilab suivante qui prend en argument un entier naturel non nul n , réalise une simulation de l'expérience et renvoie les valeurs de X_n et de Y_n afférentes.

```
function [X,Y]=simuleexp(n)
    T=grand(1,1,"uin",1,n)\\Premier tirage dans l'urne
    X=.....
    Y=T
    while T<>1 do
        T=grand(1,1,"uin",1,.....)
        X=.....
        Y=.....
    end
endfunction
```

4. En invoquant la fonction précédente, écrire un script qui demande la saisie d'un entier naturel n non nul, simule 10 000 expériences dans l'urne U_n et affiche une valeur approchée de l'espérance de X_n .

Partie C : Étude de la variable X_n .

On note I_n la variable aléatoire réelle égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n .

5. (a) Quelle est la loi de I_n ? Donner son espérance et sa variance.

- (b) Quelle est la loi de X_n conditionnelle à $\{I_n = 1\}$?
- (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad P_{\{I_n=k\}}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1)$
6. (a) Quelle est la loi de X_1 ?
- (b) Quel est l'événement $\{X_2 = 1\}$? Donner la loi de X_2 .
- (c) Calculer $P_{\{I_3=1\}}(X_3 = 2)$, $P_{\{I_3=2\}}(X_3 = 2)$ et $P_{\{I_3=3\}}(X_3 = 2)$.
Déterminer la loi de X_3 puis montrer que : $E(X_3) = \frac{11}{6}$ et $V(X_3) = \frac{17}{36}$
- (d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3) .
- (e) Déterminer la covariance du couple (I_3, X_3) . Les variables I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?
7. (a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- (b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
- (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$$

- (d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, montrer que

$$nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = P(X_{n-1} = j - 1)$$

En déduire que, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1)$$

8. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer en utilisant 5.(d) que : $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$
- (b) En déduire $E(X_n)$ et donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
9. (a) Si n est supérieur ou égal 2, calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et de $E(X_{n-1})$.
- (b) En déduire que : $V(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la partie A)
- (c) Donner un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.

Les parties A et B de cet exercice sont totalement indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans l'ordre que vous souhaitez.

Partie A : Étude d'une fonction et d'une suite numérique.

Partie A.0 : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit N la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geq 0 \quad N(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

- Déterminer le développement limité à l'ordre deux en 0 de $N(x)$.
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad N(x) \geq 0$

Partie A.1 : Étude de la fonction « principale ».

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On admet le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Réaliser l'étude de la branche infinie de f .
4. Étudier la continuité de f en 0.
5. Montrer que f est dérivable en 0 avec : $f'(0) = \frac{1}{2}$
Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f en son point d'abscisse 0.
6. En utilisant le développement limité d'ordre 2 de f en 0, montrer que : $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$
En déduire la position locale de C_f par rapport à (T) .
7. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $N(x)$ pour tout $x > 0$.
8. Donner un équivalent de $(\ln(1+x))^2$ au voisinage de 0.
9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
10. Montrer que : $\forall x \geq e-1, \quad f(x) \leq x \quad \text{et} \quad (x+1) \ln(x+1) \geq x+1$
11. Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
Dresser le tableau de variation de f .
12. On admet que f est concave.
Tracer la courbe C_f et la droite (T) dans un repère orthogonal du plan.

Partie A.2 : Étude d'une suite numérique.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq e-1$
14. Écrire une fonction Scilab d'en-tête **y=u(n)** qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n .
15. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
16. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite ℓ .

Partie B : Étude d'une fonction numérique de deux variables réelles.

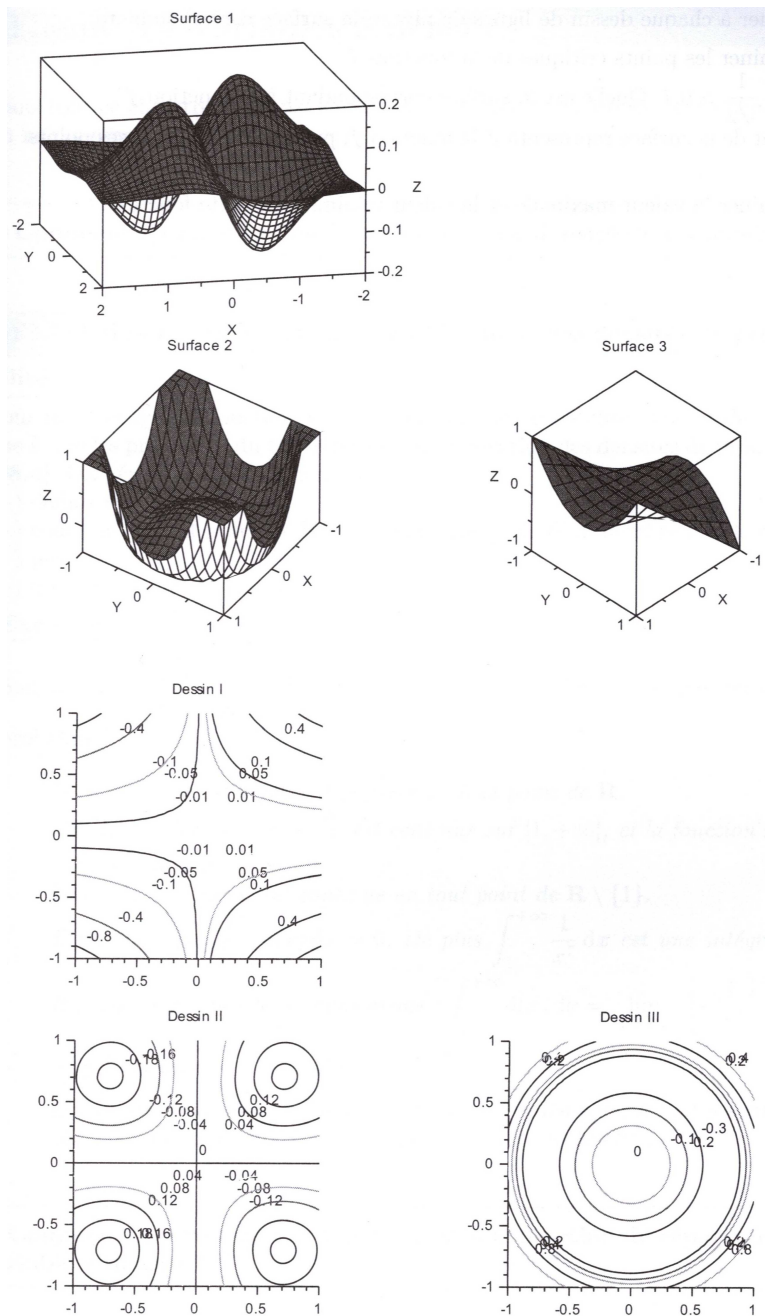
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

1. On a représenté page 6 le graphe de la fonction φ ainsi que ceux de deux autres fonctions, puis tracé quelques lignes de niveau.
Attribuer à chaque dessin de lignes de niveau la surface correspondante.
2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\nabla(\varphi)(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que φ a exactement cinq points critiques dont les points $A = (0, 0)$ et $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Quelle est la surface représentant la fonction φ ?
5. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_{1,1}^2(\varphi)(x, y) = 2xy(2x^2 - 3)e^{-x^2-y^2} \quad \text{et} \quad \partial_{2,1}^2(\varphi)(x, y) = (1 - 2x^2)(1 - 2y^2)e^{-x^2-y^2}$$

6. En vous aidant des lignes de niveau fournies en page 6, conjecturer la nature du point A . Prouver votre conjecture.
7. Quelle est la nature du point B ?

Annexe à l'exercice 3, partie B.



Correction.

Exercice 1.

Partie A.

1. Après calculs :

$$A^2 = 0_2$$

où 0_2 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.

$$A^2 = 0_2$$

donc le polynôme X^2 est un polynôme annulateur de A

or ce polynôme a pour unique racine 0

donc la seule valeur propre possible de A est 0. $(\star)$

$$0 \in \text{Sp}(A) \iff A \text{ non inversible}$$

or A a ses deux lignes proportionnelles ($L_2 = -2L_1$)

donc A est non inversible

donc 0 est valeur propre de A

donc, invoquant $(\star)$,

$$\text{Sp}(A) = \{0\}$$

Raisonnons par l'absurde.

Supposons A diagonalisable.

Alors il existe une matrice Q inversible et une matrice diagonale D telles que

$$A = QDQ^{-1}$$

or

$$\text{Sp}(A) = \{0\} \implies D = 0_2$$

donc

$$A = Q0_2Q^{-1}$$

$$A = 0_2 \quad \text{Absurde!}$$

Conclusion :

A n'est pas diagonalisable

et, par conséquent :

$$f \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

3.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}e_1 + e_2$$

Les vecteurs e_1 et $f(e_1)$ ne sont pas colinéaires

donc la famille $\mathcal{C}' = (e_1, f(e_1))$ est libre

or

$$\text{card}(\mathcal{C}') = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

donc

La famille $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

4. Considérons la matrice T de f relativement à la base $\mathcal{C}'$.

$$A^2 = 0_2 \implies f(f(e_1)) = f^2(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

or deux matrices associées à un même endomorphisme sont nécessairement semblables
donc

A est semblable à T (matrice triangulaire).

Partie B.

5. • **Montrons que f est linéaire.**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$f(\lambda P + Q) = (\square)$$

$$(\square) = (1 - X - X^2)(\lambda P + Q)' + \frac{1}{2}(-1 - X + 3X^2 + 2X^3)(\lambda P + Q)''$$

or la dérivation est linéaire

donc

$$(\square) = (1 - X - X^2)(\lambda P' + Q') + \frac{1}{2}(-1 - X + 3X^2 + 2X^3)(\lambda P'' + Q'')$$

$$(\square) = \lambda \left((1 - X - X^2)P' + \frac{1}{2}(-1 - X + 3X^2 + 2X^3)P'' \right) + (1 - X - X^2)Q' + \frac{1}{2}(-1 - X + 3X^2 + 2X^3)Q''$$

$$(\square) = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ainsi :

f est linéaire.

• **Montrons que E est stable par f .**

Après calculs :

$$f(1) = 0_E \in E \quad f(X) = 1 - X - X^2 \in E \quad f(X^2) = -1 + X + X^2 \in E$$

donc, f étant linéaire,

$$\forall P \in E \quad f(P) \in E$$

i.e.

$$f : E \rightarrow E$$

i.e. E est stable par f .

Conclusion :

f est un endomorphisme de E .

6. D'après ce qui précède :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ayant une colonne de zéros, F est non inversible
donc

$$0 \in \text{Sp}(F) = \text{Sp}(f)$$

7. Appliquant la méthode de Gauss, il vient

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc, cette dernière réduite de Gauss de F étant échelonnée en lignes avec exactement 1 ligne non nulle, il est légitime d'affirmer que :

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(F) = 1$$

8. f est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension 3
donc, invoquant le théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) = 3 - \operatorname{rg}(f)$$

or

$$\operatorname{rg}(f) = 1$$

donc

$$\dim(\ker(f)) = 2$$

Pour tout $a + bX + cX^2 \in E$:

$$a + bX + cX^2 \in \ker(f) \iff (\spadesuit)$$

$$(\spadesuit) \iff f(a + bX + cX^2) = 0_E$$

$$(\spadesuit) \iff A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\spadesuit) \iff b = c$$

Ainsi :

$$\ker(f) = \{a + bX + cX^2 \in E / b = c\}$$

$$\ker(f) = \{a + b(X + X^2) \in E / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\ker(f) = \operatorname{vect}(1, X + X^2)$$

or

$$\operatorname{card}(1, X + X^2) = 2 = \dim(\ker(f))$$

donc

$$\text{La famille } (1, X + X^2) \text{ est une base de } \ker(f).$$

9.

$$F^2 = 0_3$$

donc

$$f \circ f = \theta$$

10.

$$f^2 = \theta$$

donc le polynôme X^2 est un polynôme annulateur de f

or ce polynôme a pour unique racine 0

donc la seule valeur propre possible de f est 0

or

$$0 \in \operatorname{Sp}(f)$$

donc

$$\operatorname{Sp}(f) = \{0\}$$

$$E_0(f) = \ker(f) = \text{vect}(1, X + X^2)$$

Il vient alors

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(\ker(f)) = 2 \neq 3 = \dim(E)$$

donc, invoquant le théorème fondamental de réduction, il est légitime d'affirmer que :

f n'est pas diagonalisable.

11.

$$\mathcal{B}' = (X, 1 - X - X^2, 1)$$

$\mathcal{B}'$ est une famille de polynômes échelonnée en degrés,

donc $\mathcal{B}'$ est libre

or

$$\text{card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E)$$

donc

$\mathcal{B}'$ est une base de E .

12. Notons R la matrice passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$R = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice recherchée est R^{-1} . Appliquons la méthode de Gauss afin de la déterminer.

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L'_1 \\ L_3 \rightarrow L'_2 \\ L_1 \rightarrow L'_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L'_1 \\ -L'_2 \rightarrow L''_2 \\ L'_3 + L'_2 \rightarrow L''_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L'_1 + L''_2 \rightarrow L''_1 \\ L''_2 \\ L''_3 \end{array}$$

Conclusion :

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est : $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13.

$$f(X) = 0 \cdot X + 1 \cdot f(X) + 0 \cdot 1$$

$$f(f(X)) = f^2(X) = 0_E$$

$$f(1) = 0_E$$

donc

La matrice de f relativement à la matrice $\mathcal{B}'$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie C : Un cas plus général.

14. Il s'agit de prouver une équivalence.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Supposons** $f \circ f = \theta$.

Soit $x \in \text{Im}(f)$.

$$\exists y \in E / x = f(y)$$

ce qui induit

$$f(x) = f(f(y)) = (f \circ f)(y)$$

or

$$f \circ f = \theta$$

donc

$$f(x) = 0_E$$

donc

$$x \in \ker(f)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Im}(f) \subset \ker(f)}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ **Supposons** $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Soit $x \in E$.

Alors

$$f(x) \in \text{Im}(f)$$

or

$$\text{Im}(f) \subset \ker(f)$$

donc

$$f(x) \in \ker(f)$$

donc

$$f(f(x)) = 0_E$$

i.e.

$$(f \circ f)(x) = 0_E$$

et comme ceci est valable pour tout $x \in E$, il vient :

$$\boxed{f \circ f = \theta}$$

Conclusion globale :

$$\boxed{f \circ f = \theta \iff \text{Im}(f) \subset \ker(f)}$$

15.

$$f \circ f = \theta \implies \text{Im}(f) \subset \ker(f)$$

donc

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f))}$$

donc

$$2\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

donc, invoquant le théorème du rang,

$$2\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(E) = 3$$

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq 1,5$$

or

$$f \neq \theta \implies \dim(\text{Im}(f)) \geq 1$$

donc, $\dim(\text{Im}(f))$ étant un entier naturel,

$$\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = 1}$$

et, invoquant de nouveau le théorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) = 2$$

16.

$$f \neq \theta \implies \boxed{\exists u \in E / f(u) \neq 0_E}$$

17. (a) Soient a et b deux réels tels que :

$$af(u) + bv = 0_E \iff (\blacktriangleright)$$

Montrons alors que, nécessairement : $a = b = 0$.

Supposons $b \neq 0$.

Il vient alors

$$v = -\frac{a}{b}f(u)$$

et, par linéarité de f ,

$$v = f\left(-\frac{a}{b}u\right)$$

donc

$$v \in \text{Im}(f) \quad \text{absurde!}$$

Ainsi

$$b = 0$$

et

$$(\blacktriangleright) \iff af(u) = 0_E$$

or

$$f(u) \neq 0_E$$

donc

$$a = 0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\ker(f)$

or

$$\text{card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\ker(f))$$

donc

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \ker(f).}$$

(b) Soient a , b et c trois réels tels que :

$$au + bf(u) + cv = 0_E \iff (\circledast)$$

Montrons alors que, nécessairement : $a = b = c = 0$.

Appliquant f linéaire à (circledast) , il vient

$$(\circledast) \implies af(u) + bf^2(u) + cf(v) = 0_E$$

or

$$v \in \ker(f) \implies f(v) = 0_E$$

$$f^2 = \theta \implies f^2(u) = 0_E$$

donc

$$(\circledast) \implies af(u) = 0_E$$

or

$$f(u) \neq 0_E$$

donc, nécessairement :

$$a = 0$$

Ainsi

$$(\circledast) \implies bf(u) + cv = 0_E$$

or la famille $(f(u), v)$ est libre
donc, nécessairement :

$$b = c = 0$$

Il est par conséquent légitime d'affirmer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est libre
or

$$\text{card}(\mathcal{G}) = 3 = \dim(E)$$

donc, pour conclure :

$$\boxed{\mathcal{G} \text{ est une base de } E.}$$

(c)

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{G}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Partie A.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$k \leq t \leq k+1$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

donc, l'intégrale étant compatible avec la relation d'ordre et les fonctions en présence étant $\mathcal{C}^0$ sur $[k; k+1]$,
il vient

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

(b)

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

donc, reconnaissant une somme télescopique,

$$\ln(n+1) - \ln(1) \leq h_n$$

$$\ln(n+1) \leq h_n$$

De même,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

ce qui induit

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

et donc

$$h_n - 1 \leq \ln(n)$$

Conclusion :

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq \ln(n) + 1$$

(c) Pour n au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \ln(n+1) &\leq h_n \leq \ln(n) + 1 \\ \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &\leq \frac{h_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \end{aligned}$$

or

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$$

donc, invoquant le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$$

donc

$$h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, k_n est la somme partielle d'ordre n de la série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$)
donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \in \mathbb{R}$$

et la suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{\ln(n)} = 0$$

i.e.

$$k_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\ln(n))$$

or

$$h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

donc

$$k_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(h_n)$$

donc

$$h_n - k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h_n$$

et finalement :

$$h_n - k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Partie B.

Programme complété :

```
function [X,Y]=simuleexp(n)
    T=grand(1,1,"uin",1,n)\\Premier tirage dans l'urne
    X=1
    Y=T
    while T<>1 do
        T=grand(1,1,"uin",1,T-1)
        X=X+1
        Y=Y+T
    end
endfunction
n=input("n= ")
for k=1:10000
    [X(k),Y(k)]=simuleexp(n)
end
disp("Valeur approchée de l'espérance: "+string(mean(X)))
```

Partie C.

5. (a) Le tirage de la première boule est celui d'une boule dans l'urne initial (n boules numérotées de 1 à n) avec équiprobabilité donc I_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

$$I_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$$

$$E(I_n) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(I_n) = \frac{n^2-1}{12}$$

- (b) Si l'événement $\{I_n = 1\}$ est réalisé, cela signifie que la boule 1 est tirée au premier tirage et donc que X_n vaut 1. Et réciproquement.

$$X_n|_{\{I_n=1\}} = 1$$

- (c) Soient $n \geq 2$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$.

$\{I_n = k\}$ est réalisé donc, avant le deuxième tirage, on retire toutes les boules numérotées de k à n . Dans ce cas, $\{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement si la boule 1 est obtenue lors du $j-1$ -ième tirage après le premier tirage. L'urne contenant alors les boules numérotées de 1 à $k-1$, on en déduit que, sous cette condition, l'événement $\{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement si $\{X_{k-1} = j-1\}$ l'est.

$$\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket \quad P_{\{I_n=k\}}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j-1)$$

6. (a) X_1 est le rang du tirage de la boule 1 dans une urne qui ne contient que la boule 1 donc

$$X_1 \text{ est la variable certaine } 1.$$

- (b) $\{X_2 = 1\}$ est l'événement « tirer la boule 1 dans une urne qui ne contient que les boules 1 et 2 ».

$$X_2(\Omega) = \llbracket 1; 2 \rrbracket$$

$$P(X_2 = 1) = P(I_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 2 \rrbracket)$$

- (c) • Si l'événement $\{I_3 = 1\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 1 lors du 1er tirage. Dans ce cas, X_3 prend la valeur 1.

$$P_{\{I_3=1\}}(X_3=2) = 0$$

- Si l'événement $\{I_3=2\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 2 lors du 1er tirage. Dans ce cas, les boules 2 et 3 sont retirées de l'urne qui ne contient plus que la boule numéro 1. Cette boule est donc nécessairement obtenue lors du tirage qui suit. L'événement $\{X_3=2\}$ est donc réalisé.

$$P_{\{I_3=2\}}(X_3=2) = 1$$

- Si l'événement $\{I_3=3\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 3 lors du 1er tirage. Dans ce cas, la boule 3 est retirée de l'urne qui ne contient plus que les boules numéro 1 et 2. L'événement $\{X_3=2\}$ est alors réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est obtenue par tirage dans cette urne.

$$P_{\{I_3=3\}}(X_3=2) = \frac{1}{2}$$

- **Loi de X_3 .**

$$X_3(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$$

$(\{I_3=i\})_{i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$ est un système complet d'événements donc, invoquant le théorème des probabilités totales, il vient

$$P(X_3=2) = \sum_{i=1}^3 P(\{I_3=i\} \cap \{X_3=2\})$$

$$P(X_3=2) = \sum_{i=1}^3 P(I_3=i) P_{\{I_3=i\}}(X_3=2)$$

$$P(X_3=2) = P(I_3=2) + \frac{1}{2}P(I_3=3)$$

$$P(X_3=2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$P(X_3=2) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_3=1) = P(I_3=1)$$

donc (cf 5.(a))

$$P(X_3=1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X_3=3) = 1 - P(X_3=1) - P(X_3=2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$P(X_3=3) = \frac{1}{6}$$

- **Espérance et variance.**

Prenant un nombre fini de valeurs, X_3 admet une espérance et une variance.

$$E(X_3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6}$$

$$E(X_3) = \frac{11}{6}$$

$$E(X_3^2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} = \frac{23}{6}$$

Donc, invoquant Koenig-Huygens, il vient :

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2$$

$$V(X_3) = \frac{17}{36}$$

(d) Tableau de contingence (de la loi) du couple (I_3, X_3) .

$\begin{array}{c} I_3 \\ \backslash \\ X_3 \end{array}$	1	2	3	$P(X_3 = \dots)$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$P(I_3 = \dots)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(e) X_3 et I_3 prenant un nombre fini de valeurs, le couple (I_3, X_3) admet une covariance et, invoquant Koenig-Huygens :

$$\text{Cov}(I_3, X_3) = E(I_3 X_3) - E(I_3) E(X_3)$$

or

$$E(I_3 X_3) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{6}{6} + \frac{9}{6} = \frac{25}{6}$$

et

$$E(I_3) = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad E(X_3) = \frac{11}{6}$$

donc, finalement, après calculs :

$$\text{Cov}(I_3, X_3) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cov}(I_3, X_3) = \frac{1}{2} \neq 0 \implies X_3 \text{ et } I_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

7. (a) La v.a.r. prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la boule numéro 1 à l'issue de l'expérience effectuée dans l'urne U_n .

L'urne contenant initialement n boules, on effectue au plus n tirages. La v.a.r. X_n prend pour valeur le rang d'apparition d'une boule, c'est-à-dire le numéro d'un tirage.

En conséquence :

$$X_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$$

(b)

$$P(X_n = 1) = P(I_n = 1)$$

donc

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_i l'événement « obtenir la boule numéro $n+1-i$ lors du i -ème tirage (lors de l'expérience débutant dans l'urne U_n) ».

L'événement $\{X_n = n\}$ est réalisé si et seulement si n tirages sont nécessaires pour obtenir la boule numéro 1. Cela se produit si et seulement si :

- * le 1-er tirage fournit la boule n . Ainsi, l'événement A_1 est réalisé.
- * le 2-ème tirage fournit la boule $n-1$. Ainsi, l'événement A_2 est réalisé.
- * ...
- * le n -ème tirage fournit la boule 1 (ce qui met fin à l'expérience). Ainsi, l'événement A_n est réalisé.

$$\{X_n = n\} = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

donc, invoquant la formule des probabilités composées :

$$P(X_n = n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1}$$

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n!}$$

(c) Soit $n \geq 2$.

La famille $(\{I_n = k\})_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est un système complet d'événements donc, invoquant la formule des probabilités totales :

$$\forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad P(X_n = j) = \sum_{k=1}^n P(\{I_n = k\} \cap \{X_n = j\}) = (\square)$$

$$(\square) = \sum_{k=1}^n P(I_n = k) P_{\{I_n = k\}}(X_n = j)$$

$$(\square) = P(I_n = 1) P_{\{I_n = 1\}}(X_n = j) + \sum_{k=2}^n P(I_n = k) P_{\{I_n = k\}}(X_n = j)$$

$$(\square) = \frac{1}{n} P_{\{I_n = 1\}}(X_n = j) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} P_{\{I_n = k\}}(X_n = j)$$

or

$$\forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad P_{\{I_n = 1\}}(X_n = j) = 0$$

et (cf 5.(c))

$$P_{\{I_n = k\}}(X_n = j) = P(X_{k-1} = j - 1)$$

donc

$$(\square) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n P(X_{k-1} = j - 1)$$

donc, procédant à un changement d'indice,

$$(\square) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$$

Conclusion :

$$\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$$

(d) Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$.

$$\forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = (*)$$

Invoquant la question précédente, il vient :

$$\forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad (*) = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1) - (n-1) \times \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j - 1)$$

$$\forall j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad (*) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j - 1)$$

donc, après simplification :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket \quad \forall j \in \llbracket 2; +\infty \llbracket \quad nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = P(X_{n-1} = j-1)$$

Il vient alors :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket \quad \forall j \in \llbracket 2; +\infty \llbracket \quad P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)$$

Il reste à vérifier cette propriété pour $n = 2$.

Notons $n = 2$ et soit $j \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons tout d'abord que :

$$\frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) = \frac{1}{2}P(X_1 = j) + \frac{1}{2}P(X_1 = j-1)$$

Deux cas se présentent alors :

★ **Cas 1 : $j \geq 3$.**

$$X(\Omega) = \{1\} \implies (\{X_1 = j\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{X_1 = j-1\} = \emptyset)$$

donc

$$\frac{1}{2}P(X_1 = j) + \frac{1}{2}P(X_1 = j-1) = 0$$

or

$$X_2(\Omega) = \{1; 2\} \implies P(X_2 = j) = 0$$

donc la propriété est vraie pour $n = 2$ et $j \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$.

★ **Cas 2 : $j = 2$.**

$$X(\Omega) = \{1\} \implies (\{X_1 = j\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{X_1 = j-1\} = \{X_1 = 1\} = \Omega)$$

donc

$$\frac{1}{2}P(X_1 = j) + \frac{1}{2}P(X_1 = j-1) = \frac{1}{2}$$

or (cf 6.(b))

$$X_2(\Omega) = \{1; 2\} \implies P(X_2 = j) = \frac{1}{2}$$

donc la propriété est vraie pour $n = 2$ et $j = 2$.

★ **Cas 2 : $j = 1$.**

$$X(\Omega) = \{1\} \implies (\{X_1 = j\} = \Omega \quad \text{et} \quad \{X_1 = j-1\} = \{X_1 = 0\} = \emptyset)$$

donc

$$\frac{1}{2}P(X_1 = j) + \frac{1}{2}P(X_1 = j-1) = \frac{1}{2}$$

or (cf 6.(b))

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

donc la propriété est vraie pour $n = 2$ et $j = 1$.

Conclusion :

$$\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad P(X_n = j) = \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)$$

8. (a) Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

Les variables X_n et X_{n-1} étant finies, elles admettent une espérance.

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^n jP(X_n = j)$$

or, d'après la question précédentes avec $n \geq 2$ et $j \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^n j \left(\frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) \right)$$

$$E(X_n) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n jP(X_{n-1} = j-1)$$

or

$$\{X_{n-1} = n\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{X_{n-1} = 0\} = \emptyset$$

donc

$$E(X_n) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n jP(X_{n-1} = j-1)$$

donc, par décalage d'indice,

$$E(X_n) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)P(X_{n-1} = j)$$

$$E(X_n) = \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)$$

$$E(X_n) = \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \times 1$$

$$\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

(b)

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \quad E(X_k) - E(X_{k-1}) = \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^n (E(X_k) - E(X_{k-1})) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

donc, par télescopage,

$$E(X_n) - E(X_1) = h_n - 1$$

or

$$E(X_1) = E(1) = 1$$

donc, finalement :

$$E(X_n) = h_n$$

Invoquant 1.(c), il vient

$$E(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

9. (a)

$$E(X_n^2) = \sum_{j=1}^n j^2 P(X_n = j)$$

$$E(X_n^2) = \sum_{j=1}^n j^2 \left(\frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) \right)$$

$$E(X_n^2) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 P(X_{n-1} = j-1)$$

or

$$\{X_{n-1} = n\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{X_{n-1} = 0\} = \emptyset$$

donc

$$E(X_n^2) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n j^2 P(X_{n-1} = j-1)$$

donc, par décalage d'indice,

$$E(X_n^2) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2 P(X_{n-1} = j)$$

$$E(X_n^2) = \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(X_{n-1} = j) + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1} = j)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[} \quad E(X_n^2) = E(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$.

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

$$V(X_n) = E(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \left(E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \right)^2$$

$$V(X_n) = E(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \left(E(X_{n-1})^2 + \frac{2}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$V(X_n) = E(X_{n-1}^2) - (E(X_{n-1}))^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[} \quad V(X_n) = V(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$\forall k \in \mathbb{[2; +\infty[} \quad V(X_k) - V(X_{k-1}) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

donc, sommant ces égalités pour k variant de 2 à n , il vient, par télescope :

$$V(X_n) - V(X_1) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$V(X_n) - V(X_1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$V(X_n) - V(X_1) = h_n - k_n$$

or

$$V(X_1) = V(1) = 0$$

donc, finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[} \quad V(X_n) = h_n - k_n}$$

(c) Invoquant 2.(c), il vient :

$$\boxed{V(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Exercice 3.

Partie A.

Partie A.0

1.

$$N(x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2) - x \left(1 - x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x) \right)$$

$$N(x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2) - x + x^2 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$$

$$N(x) = \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

2. Par invocation des théorèmes généraux statuant la dérivabilité, N est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\forall x \geq 0 \quad N'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0$$

donc N est croissante sur $\mathbb{R}_+$

or

$$N(0) = 0$$

donc, nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad N(x) \geq 0$$

Partie A.1

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\ln(x+1)} \times \frac{x}{x+1}$$

or

$$x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x+1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

et, par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\ln(x+1)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln(X)} = +\infty$$

donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} = 0$$

donc

C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) au voisinage de $+\infty$.

4.

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \implies f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$$

donc

f est continue en 0.

5.

$$\forall x > 0 \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{\ln(1+x)} - 1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x \left(x + o_{x \rightarrow 0}(x) \right)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1)}{1 + o_{x \rightarrow 0}(1)}$$

donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

donc

f est dérivable en 0 avec : $f'(0) = \frac{1}{2}$

$$\text{Équation de la tangente à } C_f \text{ en son point d'abscisse 0 : } y = \frac{1}{2}x + 1$$

6.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ f(x) &= \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} \\ f(x) &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right)} \\ f(x) &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} \right)^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ f(x) &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

Développement limité de f en 0 à l'ordre 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Il vient alors :

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2} \right) = -\frac{x^2}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

ce qui induit

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2} \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$$

Ainsi, pour x voisin de 0, il vient

$$\begin{aligned} f(x) - \left(1 + \frac{x}{2} \right) &\leq 0 \\ f(x) &\leq 1 + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que, au voisinage de 0, C_f est au-dessous de la tangente (T).

7. $x \mapsto 1 + x$ est $\mathcal{C}^1$ strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
donc, par composition, $x \mapsto \ln(x + 1)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall x > 0 \quad \ln(x + 1) \neq 0$$

Or $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc, par quotient (le dénominateur ne s'annulant pas),

$$f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} \times x}{(\ln(1+x))^2}$$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{N(x)}{(\ln(1+x))^2}$$

8.

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

donc

$$(\ln(1+x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

9. Utilisant 1.,

$$N(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

or (cf 8.)

$$(\ln(1+x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

donc, par quotient, invoquant 7.,

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

ce qui induit

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}$$

i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$$

donc f' est continue en 0

ce qui induit le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Or f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc, finalement :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

10. Soit $x \geq e - 1$.

$$x + 1 \geq e$$

donc, par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x+1) \geq 1$$

ce qui induit

$$\forall x \geq e - 1 \quad (x+1) \ln(x+1) \geq x+1$$

et

$$0 < \frac{1}{\ln(x+1)} \leq 1$$

et, finalement :

$$\forall x \geq e - 1 \quad f(x) \leq x$$

11.

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{N(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

or (cf 2.)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad N(x) \geq 0$$

et

$$\forall x > 0 \quad (\ln(x+1))^2 > 0$$

donc

$$\forall x > 0 \quad f'(x) \geq 0$$

donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

or f est $\mathcal{C}^1$ en 0

donc

$$f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	+
$f(x)$	1	$+\infty$

12. Voir la courbe en annexe.

Partie A.2

13. Notons $\mathcal{H}_n$ la propriété définie par : $\ll u_n \text{ existe et } u_n \geq e - 1 \gg$

Initialisation : Pour $n = 0$.

$$u_0 = e \geq e - 1$$

donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons l'existence d'un entier naturel n tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Montrons alors que, sous cette condition, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

u_n existe et est positif

or f est définie sur $\mathbb{R}_+$

donc $f(u_n)$ est calculable

donc u_{n+1} existe.

$$u_n \geq e - 1$$

et f croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc

$$f(u_n) \geq f(e - 1)$$

or

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et} \quad f(e - 1) = e - 1$$

donc

$$u_{n+1} \geq e - 1$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété étant initialisée et héréditaire, le principe de récurrence légitime l'affirmation selon laquelle :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e - 1$.

14. Fonction demandée :

```
function y=u(n)
    y=e-1
    for k=1:n
        y=y/log(y+1)
    end
endfunction
```

15.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq e - 1$$

or

$$\forall x \geq e - 1 \quad f(x) \leq x$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) \leq u_n$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$$

donc

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

16. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et elle est minorée par $e - 1$
donc

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ tel que : $\ell \geq e - 1$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, il vient alors, cf. Calculs annexes¹ :

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = e - 1$$

$$\ell = e - 1$$

Partie B.

- Rappelons que les lignes de niveau d'une fonction correspondent aux courbes d'altitude constante tracées sur la surface représentant cette fonction. Il apparaît clairement que les courbes d'altitudes constantes de la deuxième surface sont des cercles. Donc les lignes de niveau ne peuvent être que celles du troisième dessin. De même, la première surface correspond au deuxième dessin de lignes de niveau et la troisième surface au premier dessin.
- $(x, y) \mapsto -x^2 - y^2$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynomiale) et $t \mapsto e^t$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
donc, par composition, $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
or, étant polynomiale, $(x, y) \mapsto xy$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
donc, par produit :

φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla(\varphi)(x, y) = e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} -2x^2y + y \\ -2y^2x + x \end{pmatrix}$$

4. Rappelons le fait que nous travaillons sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \text{ point critique de } \varphi \iff (\blacksquare)$$

$$(\blacksquare) \iff \nabla(\varphi)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\blacksquare) \iff \begin{pmatrix} -2x^2y + y \\ -2y^2x + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\blacksquare) \iff \begin{cases} y(-1 + 2x^2) = 0 \\ x(-1 + 2y^2) = 0 \end{cases}$$

$$(\blacksquare) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(\blacksquare) \iff (x, y) \in \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Conclusion :

1. Calculs annexes :

$$x = f(x) \iff \frac{x}{\ln(x+1)} = x \iff x \ln(x+1) = x \iff x(\ln(x+1) - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x+1 = e \iff x = 0 \text{ ou } x = e - 1$$

or

$$f(0) = 1$$

donc la valeur 0 est à exclure et, finalement :

$$x = f(x) \iff x = e - 1$$

L'ensemble des points critiques de φ est $\left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

Il est clair que seule la première surface peut correspondre à ces points critiques.

5.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_{1,1}^2 (\varphi) (x, y) = -yxe^{-x^2-y^2} (4 - 2x(1 - 2x^2))$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_{1,2}^2 (\varphi) (x, y) = \partial_{2,1}^2 (\varphi) (x, y) = (1 - 2x^2)(1 - 2y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_{2,2}^2 (\varphi) (x, y) = -yxe^{-x^2-y^2} (4 - 2y(1 - 2y^2))$$

Ce qui induit

$$H_A = \nabla^2 (\varphi) (0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_B = \nabla^2 (\varphi) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

★ **Nature du point A.**

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \in \text{Sp} (H_A) \iff H_A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \iff \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda \in \{-1; 1\}$$

H_A ayant deux valeurs propres de signes contraires, il est légitime d'affirmer que φ n'admet pas d'extremum local en A.

Mieux :

A est un point selle.

★ **Nature du point B.**

H_B est triangulaire de termes diagonaux $-2e^{-1}$

donc H_B a pour unique valeur propre $-2e^{-1}$

or cette valeur propre est négative

donc

φ admet en B un maximum local.