

DEVOIR LIBRE DE DÉCEMBRE (2)

À rendre le 18/12.

Exercice 1

1. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation : $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5n^2 - 4n}{3}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n+k}$
 - (a) Calculer S_1, S_2, S_3 .
 - (b) Calculer $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$.
 - (c) Montrer alors que : $S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Le but de cet exercice est de calculer la somme : $S_n = \sum_{p=0}^n p^2 \binom{2n}{2p}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$

1. On pose : $B(X) = 2X^2 + \frac{5}{2}X + \frac{1}{2}$.
 - (a) Montrer que B admet deux racines réelles, notées α et β dans la suite. Donner la forme factorisée de B .
 - (b) Soit R le reste de la division euclidienne de $f(X)$ par $B(X)$. Que dire sur le degré de R ? Déterminer $R(\alpha)$ et $R(\beta)$.
 - (c) En déduire l'expression développée de $R(X)$.
2. (a) Justifier que f , puis f' , sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x . (f'' est la dérivée de f').
 - (c) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(1+x)^{2n}$ et $(1-x)^{2n}$.
 - (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} x^{2p}$
 - (c) En déduire des expressions de $f'(1)$ et $f''(1)$ sous forme de sommes.
4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier p : $p^2 = a \cdot 2p(2p-1) + b \cdot 2p$
5. Déduire des questions précédentes une expression de S_n en fonction de n .

Exercice 3

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}}$

On admet : $2 < e < 3$

1. Montrer que φ est trois fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)$ et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
3. En déduire le sens de variation de φ' , et montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$
4. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
5. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Dresser le tableau de variations complet de φ .
7. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$.
Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.

Exercice 1

1. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation : $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5n^2-4n}{3}$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n+k}$

(a) Calculer S_1, S_2, S_3 .

(b) Calculer $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$.

(c) Montrer alors que : $S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$

1. Soit n de $\mathbb{N}$.

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5n^2-4n}{3} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{5n^2-4n}{3} \Leftrightarrow (i)$$

$$(i) \Leftrightarrow 3n(n+1) + n(n+1)(n-1) = 2(5n^2-4n)$$

$$(i) \Leftrightarrow 3n(n+1) + n(n+1)(n-1) - 2n(5n-4) = 0$$

$$(i) \Leftrightarrow n(3n+3 + n^2-1 - 10n+8) = 0$$

$$(i) \Leftrightarrow n(n^2-7n+10) = 0$$

$$(i) \Leftrightarrow n=0 \text{ ou } n=2 \text{ ou } n=5$$

Conclusion :

L'ensemble solution cherché est $\{0; 2; 5\}$.

Annexe

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$$

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

2.a. $S_1 = \sum_{k=0}^1 \binom{2}{k+1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$

$$S_2 = \sum_{k=0}^2 \binom{4}{2+k} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{3 \times 4}{2} + 4 + 1 = 11$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^3 \binom{6}{3+k} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 20 + 15 + 6 + 1 = 42$$

2.b. Appliquant la formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$

2.c. $2^{2n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} \left(2^{2n} + \binom{2n}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(\binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \right) = (i)$

$$(i) = \frac{1}{2} \left(\binom{2n}{n} + \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \dots + \binom{2n}{2n} \right)$$

$$(i) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n+k}$$

donc, invoquant la formule de symétrie : $(i) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n+k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n+k}$

Conclusion :

$$2^{2n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} = S_n$$

Exercice 2 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Le but de cet exercice est de calculer la somme : $S_n = \sum_{p=0}^n p^2 \binom{2n}{2p}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$

1. On pose : $B(X) = 2X^2 + \frac{5}{2}X + \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que B admet deux racines réelles, notées α et β dans la suite. Donner la forme factorisée de B .

(b) Soit R le reste de la division euclidienne de $f(X)$ par $B(X)$. Que dire sur le degré de R ? Déterminer $R(\alpha)$ et $R(\beta)$.

(c) En déduire l'expression développée de $R(X)$.

2. (a) Justifier que f , puis f' , sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x . (f'' est la dérivée de f').

(c) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(1+x)^{2n}$ et $(1-x)^{2n}$.

(b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} x^{2p}$

(c) En déduire des expressions de $f'(1)$ et $f''(1)$ sous forme de sommes.

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier p : $p^2 = a \cdot 2p(2p-1) + b \cdot 2p$

5. Déduire des questions précédentes une expression de S_n en fonction de n .

1.a. $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}$

$$\alpha = -1 \quad \beta = -\frac{1}{4}$$

$$B(x) = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

1. b. c. $\deg(B) = 2 \Rightarrow \boxed{\deg(R) \leq 1}$

Ainsi: $\exists a, b \in \mathbb{R} / R(x) = ax + b$

$\exists! Q \in \mathbb{R}[x] / f(x) = B(x)Q(x) + ax + b$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -a + b \Rightarrow -a + b = 4^m \quad (l_1) \quad \boxed{R(x) = 4^m}$

$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}a + b \Rightarrow \frac{3^{2m}}{4^{2m}} + \frac{5^{2m}}{4^{2m}} = -\frac{1}{4}a + b \quad (l_2) \quad \boxed{R(\frac{1}{4}) = \frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}}}$

$(l_2) - (l_1) \Rightarrow \frac{3}{4}a = \frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}} - 4^m \quad \boxed{a = \frac{4}{3} \left(\frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}} - 4^m \right)}$

Il vient alors:

$b = a + 4^m = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}} - \frac{4}{3} \cdot 4^m + 4^m = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}} - \frac{1}{3} \cdot 4^m$

$b = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}} - 4^{m-1} \right)$

Conclusion:

$R(x) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}} - 4^{m-1} \right) x + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3^{2m} + 5^{2m}}{4^{2m}} - 4^{m-1} \right)$

2. a. f est polynomiale donc $\boxed{f \text{ et } f' \text{ sont d\u00e9rivables sur } \mathbb{R}}$

2. b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2n(1+x)^{2n-1} - 2n(1-x)^{2n-1}$

$f''(x) = 2n(2n-1)(1+x)^{2n-2} + 2n(2n-1)(1-x)^{2n-2}$

2. c. $f'(1) = 2n \cdot 2^{2n-1} = n 2^{2n} \quad f''(1) = 2n(2n-1) 2^{2n-2} = n(2n-1) 2^{2n-1}$

3. a. Par application de la formule du bin\u00f4me: $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad (1-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k x^k$

3. b. Il vient alors:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} [(-1)^k + 1] x^k$

or $\forall k \in \mathbb{N}, k \text{ impair} \Rightarrow (-1)^k + 1 = 0$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} 2 x^{2p} = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} x^{2p}}$

3. c. Il vient alors: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} 2p x^{2p-1} \Rightarrow \boxed{f'(1) = 4 \sum_{p=1}^n p \binom{2n}{2p}}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 4 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} p(2p-1) x^{2p-2} \Rightarrow \boxed{f''(1) = 4 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} p(2p-1)}$

4. $\forall p \in \mathbb{N}, a 2p(2p-1) + b 2p = a 4p^2 + (b-a) 2p$

$\forall p \in \mathbb{N}, a 2p(2p-1) + b 2p = p^2 \Leftrightarrow 4a = 1 \text{ et } b-a = 0$

donc: $\boxed{a = \frac{1}{4} \text{ et } b = a = \frac{1}{4}}$

5.

$S_n = \sum_{p=0}^n p^2 \binom{2n}{2p} = \sum_{p=0}^n \left(\frac{p}{2}(2p-1) + \frac{p}{2} \right) \binom{2n}{2p} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n p \binom{2n}{2p} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n p(2p-1) \binom{2n}{2p} = \frac{1}{2} f'(1) + \frac{1}{8} f''(1)$

or $f'(1) = n 2^{2n} \text{ et } f''(1) = n(2n-1) 2^{2n-1}$

donc $\boxed{S_n = n 2^{2n-3} + n(2n-1) 2^{2n-4}}$

Exercice 3 On consid\u00e8re la fonction φ d\u00e9finie sur $\mathbb{R}_+^*$ par: $\varphi(x) = e^x - x e^{\frac{1}{x}}$

On admet: $2 < e < 3$

1. Montrer que φ est trois fois d\u00e9rivable sur $]0; +\infty[$.

Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)$ et montrer: $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$

2. \u00c9tudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.

3. En d\u00e9duire le sens de variation de φ' , et montrer que: $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$

4. D\u00e9terminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

5. D\u00e9terminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Dresser le tableau de variations complet de φ .

7. On admet: $15 < \varphi(3) < 16$.

Montrer: $\forall x \in [3; +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.

1. $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\exp$ sont d\u00e9rivables sur $\mathbb{R}_+^*$

donc, par composition, $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est d\u00e9rivable sur $\mathbb{R}_+^*$

or $x \mapsto -x$ l'est aussi

donc, par produit, $x \mapsto x e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

ou $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

donc, par somme: $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = e^x - e^{1/x} + \frac{1}{x} e^{1/x}$$

$$\varphi''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} e^{1/x} - \frac{1}{x^2} e^{1/x} + \frac{1}{x} \times \frac{-1}{x^2} e^{1/x} = e^x - \frac{1}{x^3} e^{1/x}$$

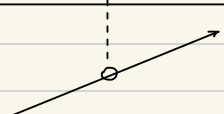
$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3}{x^4} e^{1/x} + \frac{1}{x^5} e^{1/x}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{1/x}}$$

$$2. \quad \forall x > 0, \frac{3x+1}{5} > 0, e^{1/x} > 0 \text{ et } e^x > 0 \text{ donc } \forall x > 0, \varphi'''(x) > 0$$

donc $\boxed{\varphi'' \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'''(x)$		+	+
$\varphi''(x)$			



$$\varphi''(1) = e - e = 0$$

3. A la lecture du tableau ci-contre: $\forall x \in]0, 1[, \varphi''(x) < 0$, $\varphi''(1) = 0$ et $\forall x > 1, \varphi''(x) > 0$

donc $\boxed{\varphi' \text{ est strictement décroissante sur }]0, 1] \text{ et strictement croissante sur } [1, +\infty[}$

$$\text{or } \varphi'(1) = e$$

$$\text{donc } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi'(x) \geq e}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ (règles de L'Hôpital)}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

donc, par différence:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty}$$

$$5. \quad \forall x > 0, \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{1/x}$$

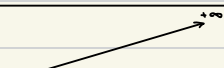
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (règles de L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^t = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty}$$

$$\left(\begin{array}{l} \forall x > 0, \varphi(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - e^{1/x} \right) \\ \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1 \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - e^{1/x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty}$$

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+
φ		



7. Soit d la fonction définie sur $[3, +\infty[$ par: $d(x) = \varphi(x) - ex$

d est deux fois dérivable sur $[3, +\infty[$.

$$\forall x \geq 3, d'(x) = \varphi'(x) - e$$

$$d''(x) = \varphi''(x) > 0$$

donc d' est croissante

$$\text{or } d'(3) = \varphi'(3) - e = e^3 - \frac{2}{3} e^{1/3} > 0 \text{ (en effet: } e^3 > e^{1/3})$$

$$\text{donc } \forall x \geq 3, d'(x) \geq d'(3) > 0$$

donc d est croissante

$$\text{donc } \forall x \geq 3, d(x) \geq d(3) = \varphi(3) - e$$

$$\text{or } \varphi(3) > 15 \Rightarrow \varphi(3) - e > 0$$

$$\text{donc } \forall x \geq 3, d(x) > 0$$

$$\text{Conclusion: } \boxed{\forall x \geq 3, \varphi(x) \geq ex}$$