

LYCEE MILITAIRE D'AUTUN

MPSI , ANNEE SCOLAIRE 2003-2004

CHAPITRE 16 : FRACTIONS RATIONNELLES

Fiche d'exercices sur les FRACTIONS RATIONNELLES

- 1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions :

$$\frac{X+1}{X^2+1}, \frac{4}{(X^2+1)^2}, \frac{X+1}{X^4(X-1)}, \frac{X+i}{X^2+X+i}.$$

- 2) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions :

$$\frac{6X^5}{(X^2-1)(X^2+X+1)}, \frac{X+1}{X^4+1}, \frac{1}{(X+1)^2(X^2+1)^2}, \frac{X^4+2}{X(X^2-1)^2(X^2+1)}.$$

- 3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{1}{\prod_{k=0}^n (X+k)}$.

Retrouver la relation $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

- 4) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions $\frac{1}{X^n-1}$, $\frac{1}{X^n+1}$ et $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

- 5) Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fractions $\frac{1}{X(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$ et $\frac{1}{X^2+1}$.

- 6) Calculer les sommes $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ et $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{k(k+2)} 3^{k-1}$.

- 7) Soient $P(X)$ un polynôme de degré inférieur à n et $(\omega_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

- a) Décomposer sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{P(X)}{X^n-1}$.

- b) Montrer que si p n'est pas un multiple de n alors on a la relation $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_k)^p = 0$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega_k)$.

- c) Montrer que $F(X) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega_k}{X - \omega_k} P(\omega_k) - \frac{1}{2} P(0)$.

- d) Soient $P(X) = X$ et $X = e^{2i\theta}$, montrer que $\frac{\sin((n-2)\theta)}{\sin n\theta} = \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} \cotan(\theta - \frac{k\pi}{n})$.