

PROPOSITION DE CORRIGÉ BCE

CONCOURS D'ADMISSION 2020

prépa

**Mathématiques
EDHEC BS**

Option Economique

Samedi 4 juillet 2020 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

*Candidat bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8 h 00 - 13 h 20*

CONCOURS D'ADMISSION 2020
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

option économique

Samedi 4 juillet 2020 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Exercice 1

On notera 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est pas vide car ${}^t0 = 0 = -0$ donc $0 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$,

${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^tM + {}^tN$ par linéarité

or ${}^tM = -M$ et ${}^tN = -N$ donc ${}^t(\lambda M + N) = -\lambda M - N = -(\lambda M + N)$

d'où $\lambda M + N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. a) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on calcule ${}^tf(M)$:

$${}^tf(M) = {}^t(({}^tA)M + MA)$$

Par linéarité et formule de la transposée d'un produit :

$${}^tf(M) = {}^tM({}^tA) + {}^tA{}^tM = {}^tMA + {}^tA{}^tM = -MA - {}^tAM \text{ car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

$${}^tf(M) = -({}^tAM + MA) = -f(M)$$

Donc $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

b) On a montré que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrons que f est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$,

$$f(\lambda M + N) = {}^tA(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A = \lambda {}^tAM + \lambda MA + {}^tAN + NA = \lambda f(M) + f(N)$$

Donc f est une application linéaire de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$$3. \text{ a) } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} \in \mathbb{R}/(S) : \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Or } (S) \iff \begin{cases} 2m_{11} = 0 \\ 2m_{22} = 0 \\ 2m_{33} = 0 \\ m_{21} = -m_{12} \\ m_{31} = -m_{13} \\ m_{23} = -m_{32} \end{cases} \iff \begin{cases} m_{11} = 0 \\ m_{22} = 0 \\ m_{33} = 0 \\ m_{21} = -m_{12} \\ m_{31} = -m_{13} \\ m_{23} = -m_{32} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} \\ -m_{12} & 0 & m_{23} \\ -m_{13} & -m_{23} & 0 \end{pmatrix}, (m_{12}, m_{13}, m_{23}) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (m_{12}, m_{13}, m_{23}) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \{m_{12}J + m_{13}K + m_{23}L, (m_{12}, m_{13}, m_{23}) \in \mathbb{R}^3\}$$

Donc $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}(J, K, L)$ donc la famille (J, K, L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(S) : aJ + bK + cL = 0$

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

La famille (I, J, K) est donc libre. Etant libre et génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
On a donc $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$

$$4. \text{ a) } f(J) = ({}^tA)J + JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $f(J) = -J - L$

On montre de même que $f(K) = 0$ et $f(L) = -L$

$$b) \text{ Im}f = \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) = \text{Vect}(-J - L, 0, -L) = \text{Vect}(-J - L, -L) = \text{Vect}(J, L)$$

(J, L) étant libre, (J, L) est une base de $\text{Im}f$ et $\dim(\text{Im}f) = \text{rg}(f) = 2$

$$c) \text{ D'après le théorème du rang : } \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \text{ donc } \dim(\text{Ker}f) = 1$$

Or $K \neq 0$ et $f(K) = 0$ donc $\text{Ker}f = \text{Vect}(K)$

5. a) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et tous ses coefficients sont dans } \{-1, 0\}$$

b) F est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, à savoir -1 et 0

$$c) f + Id \text{ admet pour matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

$\text{rg}(f + Id) = \text{rg}(F + I) = 2$ car les 2 premières colonnes sont non colinéaires et la 3e est nulle.
Donc d'après le théorème du rang $\dim(\text{ker}(f + Id)) = 3 - 2 = 1$

or $f + Id = f - (-1)Id$ donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est 1 . On sait également que $\dim(\text{ker}f) = 1$ donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est 1

On en déduit que $\dim(\ker f) + \dim(\ker(f + Id)) = 2$ or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)dt$

On procède au changement de variable affine C^1 bijectif $u = -t$

$$\text{Alors } \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)dt = \int_{+\infty}^x f_X(-u)(-du) = \int_x^{+\infty} f_X(-u)(du)$$

Mais f_X étant une fonction paire, pour tout réel u , $f_X(u) = f_X(-u)$

$$\text{Donc } F_X(-x) = \int_x^{+\infty} f_X(u)(du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)(du) - \int_{-\infty}^x f_X(u)(du) = 1 - F_X(x)$$

2. a) $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$ car $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $Y = |X|$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(|X| \leq x)$$

$$\text{- si } x < 0, F_Y(x) = 0$$

$$\text{- si } x \geq 0, F_Y(x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x) = F_X(x) - (1 - F_X(x)) = 2F_X(x) - 1$$

- b) X étant une variable à densité, F_X est continue et C^1 sur $\mathbb{R}$

Par multiplication par la constante 2 et différence avec la constante 1, F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+$

F_Y est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que fonction constante nulle.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = 0 \text{ et } F_Y(0) = 2F_X(0) - 1 = 2 \frac{1}{2} - 1 = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = F_Y(0)$ et F_Y continue en 0 donc continue sur $\mathbb{R}$

F_Y est donc une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. C'est donc la fonction de répartition d'une variable à densité dont une densité est donnée par la dérivée de F_Y en tout point où F_Y est C^1 et en donnant une valeur arbitraire en 0 ainsi :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- c) Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)dt$ est absolument convergente donc si et seulement si (nullité de f sur $\mathbb{R}^-$ et positivité sur $\mathbb{R}^+$) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$ converge.

$$\text{Soit } A > 0, \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = -\sigma^2 \int_0^A \left(-\frac{t}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$\text{Donc } \int_0^A \exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2}) dt = -\sigma^2 [\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})]_0^A = \sigma^2 (1 - \exp(-\frac{A^2}{2\sigma^2}))$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \exp(-\frac{A^2}{2\sigma^2}) = 0 \text{ donc l'intégrale converge vers } \sigma^2$$

$$Y \text{ possède une espérance et } E(Y) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^2 = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$3. \text{ a) Soit } \phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (y_1, \dots, y_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \end{cases}$$

avec $(Y_1, \dots, Y_n)$ n-échantillon de VAR indépendantes de même loi que Y et ϕ indépendante du paramètre à estimer. Donc $S_n = \phi(Y_1, \dots, Y_n)$ est un estimateur de σ

$$\text{Par linéarité } E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(Y_k)$$

$$\text{avec } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(Y_k) = E(Y) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ donc } E(S_n) = \frac{1}{n} n \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$S_n \text{ est donc un estimateur de } \sigma \text{ de biais } E(S_n) - \sigma = \sigma (\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1)$$

$$\text{En posant } T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} S_n, T_n \text{ reste un estimateur de } \sigma \text{ et par linéarité } E(T_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E(S_n) = \sigma$$

Ainsi T_n est un estimateur sans biais de σ

$$b) X \text{ admet un moment d'ordre 2 valant sa variance car } X \text{ est centrée. Donc } E(X^2) = \sigma^2$$

$$Y = |X| \text{ donc } Y^2 = X^2 \text{ donc } E(Y^2) = E(X^2) = \sigma^2$$

$$\text{D'après la formule de Koenig Huygens, } V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \sigma^2 (1 - \frac{2}{\pi})$$

Avec $(Y_1, \dots, Y_n)$ n-échantillon de VAR indépendantes et de même loi que Y on a par propriété de la variance :

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(Y_k)$$

$$\text{avec } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, V(Y_k) = V(Y) = \sigma^2 (1 - \frac{2}{\pi})$$

$$\text{donc } V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} (1 - \frac{2}{\pi})$$

$$c) T_n \text{ étant un estimateur sans biais de } \sigma, \text{ son risque quadratique est égal à sa variance, d'où par propriété de la variance :}$$

$$r_n = V(T_n) = \frac{\pi}{2} V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} (\frac{\pi}{2} - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0 \text{ donc } T_n \text{ est un estimateur convergent.}$$

$$d) \text{ X=grand(1,n,'nor',0,sigma)}$$

$$Y=\text{abs}(X)$$

$$S=1/n*\text{sum}(Y)$$

$$T=\text{sqrt}(\pi/2)*S$$

Exercice 3

1. Pour $n = 1$ nécessairement $X = 1$, on pioche donc une boule dans V et Y prend la valeur 1 si la boule piochée est blanche ou 0 sinon. Les boules blanches étant en proportion p , $P(Y = 1) = p$ et Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p
2. X indique le numéro de l'élément tiré lors d'un tirage équiprobable d'un élément parmi n éléments numérotés. Donc $X \hookrightarrow \mathbb{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
3. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_{[X=k]}$ indique le nombre de boules blanches obtenues, i.e. de succès, lors de la répétition de k épreuves de Bernoulli indépendantes (remise) de paramètre p on en déduit que $Y_{[X=k]} \hookrightarrow \mathbb{B}(k, p)$

$$\text{Ainsi } Y_{[X=k]}(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket \text{ et } P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{pour } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{pour } i > k \end{cases}$$

4. `X=grand(1,1,'uin',1,n)`
`Y=1/n*grand(1,1,'bin',X,p)`

5. a) $Y_{[X=k]}(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket$ avec $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

Avec le système complet d'événements tous de probabilité non nulle $([X = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, par la formule des probabilités totales :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^n P(X = k) P_{[X=k]}(Y = 0)$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{[X=k]}(Y = 0) = \binom{k}{0} p^0 q^k = q^k \text{ et } P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } P(Y = 0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} q^k = \frac{q}{n} \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- b) En procédant de même pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^n P(X = k) P_{[X=k]}(Y = i)$$

Lorsque $k < i$, $P_{[X=k]}(Y = i) = 0$ donc

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n P(X = k) P_{[X=k]}(Y = i)$$

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

Ce qui correspond bien à une somme de $n - i + 1$ termes.

6. a) Soit $1 \leq i \leq k \leq n$, $i \binom{k}{i} = i \frac{k!}{i!(k-i)!} = i \frac{k(k-1)!}{i(i-1)!((k-1)-(i-1))!}$

$$\text{Donc } i \binom{k}{i} = k \frac{(k-1)!}{(i-1)!((k-1)-(i-1))!} = k \binom{k-1}{i-1}$$

- b) Y étant à support fini admet une espérance et on a $E(Y) = \sum_{i=1}^n i P(Y = i)$

$$\text{Donc } E(Y) = \sum_{i=1}^n i \left(\frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right)$$

$$\text{D'où en utilisant 6a : } E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

Par inversion de la contrainte $1 \leq i \leq k \leq n$,

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

c) D'après la formule du binôme de Newton, avec le changement de variable $i' = i - 1$

$$\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = \sum_{i'=0}^{k-1} \binom{k-1}{i'} p^{i'+1} q^{k-1-i'} = p \sum_{i'=0}^{k-1} \binom{k-1}{i'} p^{i'} q^{k-1-i'} = p(p+q)^{k-1} = p$$

$$\text{Donc } E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kp = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)p}{2}$$

7. a) On suppose $n \geq 2$, Y étant à support fini, $Y(Y-1)$ admet une espérance et on a d'après le théorème de transfert :

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{i=2}^n i(i-1)P(Y=i) = \sum_{i=2}^n i(i-1) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

En utilisant 6a successivement, on a $(i(i-1)) \binom{k}{i} = k(k-1) \binom{k-2}{i-2}$

$$\text{Ainsi } E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left(\sum_{k=i}^n k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

Et par inversion de la contrainte $2 \leq i \leq k \leq n$,

$$E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n (k(k-1)) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}$$

b) D'après la formule du binôme de Newton et en utilisant le changement de variable $i' = i - 2$:

$$\sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} = \sum_{i'=0}^{k-2} \binom{k-2}{i'} p^{i'+2} q^{k-2-i'} = p^2 \sum_{i'=0}^{k-2} \binom{k-2}{i'} p^{i'} q^{k-2-i'} = p^2 (p+q)^{k-2} = p^2$$

$$\text{D'où } E(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{p^2}{n} \sum_{k=0}^n k(k-1) = \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \right)$$

$$E(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{p^2}{2n} n(n+1) \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right)$$

$$E(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{2} (n+1) \frac{2n-2}{3} = \frac{p^2}{3} (n+1)(n-1) = \frac{p^2(n^2-1)}{3}$$

c) Si $n = 1$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ainsi $Y(Y-1) = 0$ et $E(Y(Y-1)) = 0$. En remplaçant n par 1 dans l'expression précédente, on trouve également 0 donc l'expression reste valable pour $n = 1$

d) Y étant à support fini admet une variance et par la formule de Koenig Huygens, on a $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$$\text{Par linéarité } E(Y(Y-1)) = E(Y^2) - E(Y) \text{ donc } V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2$$

Problème

1. Les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont des fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Elle y sont donc continues et les deux intégrales existent.

$$2. I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{(1+x)} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x}{(1+x)^2} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$\text{Donc } I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = [\ln(1+x)]_0^1 - I_0 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$3. \text{ a) Par linéarité, } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n \frac{x^2 + 2x + 1}{(1+x)^2} dx$$

$$\text{D'où } I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 x^n \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{b) En posant } n = 0 \text{ dans l'égalité précédente } I_2 + 2I_1 + I_0 = 1 \text{ d'où } I_2 = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$$

$$\text{c) } a=b$$

$$b=1/(k-1)-2*a-aux$$

$$4. \text{ a) Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } x \in [0, 1] \text{ } (1+x)^2 \geq 1 \text{ donc } \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$$

$$\text{d'où } 0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

$$\text{Et par croissance de l'intégrale } 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \text{ d'où } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc par théorème d'encadrement, la suite } (I_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

$$5. \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}$$

$$\text{En posant } \begin{cases} u(x) = x^n & u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} & v(x) = -\frac{1}{1+x} \end{cases} \text{ les fonctions } u \text{ et } v \text{ étant } C^1 \text{ sur } [0, 1]$$

$$\text{L'intégration par parties est donc licite et } I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 n \frac{x^{n-1}}{(1+x)} = -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}$$

$$6. \text{ a) En appliquant l'égalité précédente à } n = 1, I_1 = J_0 - \frac{1}{2} \text{ donc } J_0 = \ln 2$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ par linéarité, } J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{b) En appliquant l'égalité à } n = 0, \text{ on obtient } J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln 2$$

$$7. J=1/k-J$$

$$I=n*J-1/2$$

$$8. \text{ Soit pour tout entier } n \text{ la proposition } P_n : "J_n = (-1)^n (\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k})"$$

Initialisation : $J_1 = 1 - \ln 2 = (-1)^1(\ln 2 - \frac{(-1)^{1-1}}{1})$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : supposons que pour un entier naturel non nul n fixé, P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.

$$J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n = \frac{1}{n+1} - (-1)^n(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}) = \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1}(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k})$$

Mais $1 = (-1)^{2n+2}$ donc $\frac{1}{n+1} = (-1)^{2n+2} \frac{1}{n+1} = -(-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Donc $J_{n+1} = (-1)^{n+1}(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k})$ et P_{n+1} est vraie.

En conclusion on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k})$

9. a) On a montré en 4 que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et en 5 que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_{n-1} = \frac{1}{2}$

Soit $J_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

- b) En repartant de l'égalité démontrée à la question 8, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}) = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ existe et vaut $\ln 2$ donc la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.

D'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

- c) D'après le a de la question 9) on a $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n-1)}$ donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

10. a) On sait que $J_n = (-1)^n u_n$ et $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$

- b) D'après la question 9, on sait que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge donc en multipliant chaque terme par la constante $-\frac{1}{2}$ la série converge toujours (et son terme général est $\frac{(-1)^n}{2n}$ et sa somme vaut $\frac{-\ln 2}{2}$)

On a vu que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$ mais le théorème de comparaison n'est applicable qu'aux séries à termes positifs, on ne peut donc pas en déduire la nature de la série de terme général u_n , qui n'est par ailleurs pas absolument convergente (série harmonique DV)

11. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*, u_k = \ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j}$

Donc $ku_k = (\ln 2)k - k \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j}$

$(k+1)u_{k+1} = (\ln 2)(k+1) - (k+1) \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$

$(k+1)u_{k+1} - ku_k = \ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} - (k+1) \frac{(-1)^{k+1-1}}{(k+1)} = u_k - (-1)^k$

Donc $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme cette égalité pour k variant de 1 à n (somme finie) :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^n (-1)^k$$

La deuxième somme est télescopique et vaut $(n+1)u_{n+1} - u_1$.

La troisième est la somme partielle d'une série géométrique de raison -1 et vaut $(-1) \frac{1 - (-1)^n}{2}$

$$\text{Donc } S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$$

$$\text{c) } S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 = (2n+1)u_{2n+1} - (\ln 2 - 1)$$

$$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - (\ln 2 - 1) - \frac{1}{2}2 = (2n+2)u_{2n+2} - \ln 2$$

Or on sait que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2} = -\frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+2)u_{2n+2} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{On en déduit ainsi que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - (\ln 2 - 1) = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

(S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant convergentes et de même limite, on en déduit que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2} - \ln 2$. Ceci signifie que la série de terme général u_n converge et que sa somme vaut $\frac{1}{2} - \ln 2$

$$12. \text{ On a montré que } \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ donc que } \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j}) = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\text{On a vu en 9b) que } \ln 2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

$$\text{D'où } \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ (expression c)}$$