

Problème 2

Liminaire

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = x \ln(x)$

1. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On notera toujours h le prolongement obtenu...

2. Expliquer pourquoi l'intégrale $I = \int_0^1 t \ln(t) dt$ existe.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^1 t \ln(t) dt$.
En déduire la valeur de I .

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in] -\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ .

4. Montrer que la fonction φ est continue sur $] -\infty, 1]$.

5. (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

(b) En déduire les variations de φ sur $] -\infty, 1]$.

(c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

6. Montrer que $\varphi(x) \underset{-\infty}{\sim} -x \ln(1-x)$ puis en déduire la limite de φ en $-\infty$.

7. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

8. Déduire du liminaire que : $\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{1}{4}$.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc

h est prolongeable par continuité en 0
en posant : $h(0) = 0$

2. h est continue sur $[0, 1]$

donc $\int_0^1 h(x) dx$ existe donc

$$I = \int_0^1 t \ln(t) dt \text{ existe.}$$

3. Soit $A \in]0, 1[$.

$$\int_A^1 t \ln(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t}{2} dt = -\frac{A^2}{2} \ln(A) - \left[\frac{t^2}{4} \right]_A^1$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= t & v(t) &= \frac{t^2}{2} \\ u, v &\mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, 1] \end{aligned}$$

donc
$$\int_A^1 t \ln(t) dt = -\frac{A^2}{2} \ln(A) - \frac{1}{4} + \frac{A^2}{4}$$

or, par croissances comparées, $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^2 \ln(A) = 0$

donc

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 t \ln(t) dt = -\frac{1}{4}$$

$$I = -\frac{1}{4}$$

4. $x_1 \mapsto 1-x \in^1 \text{ sur }]-0;1[$

$$\forall x < 1, 1-x > 0$$

$$\ln \in^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

par composition puis par produit

$$\Rightarrow x_1 \mapsto (1-x) \ln(1-x) \in^1 \text{ sur }]-\infty;1[$$

$$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^1(]-\infty;1[)$$

$$x_1 \mapsto x \in^1 \text{ sur }]-\infty;1[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \ln(1-x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 1 = \varphi(1) \Rightarrow \varphi \in^0 \text{ en } 1$$

Conclusion:

$$\varphi \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur }]-\infty;1[$$

5.a. 4. $\Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^1(]-\infty;1[)$

$$\forall x < 1, \varphi'(x) = 1 - \ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} = -\ln(1-x)$$

$$\forall x < 1, \varphi'(x) = -\ln(1-x)$$

5.b. Pour tout $x < 1$: $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 1 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[$

Conclusion:

$$\varphi \text{ strictement croissante sur }]0;1[$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi \text{ strictement décroissante sur }]-\infty;0[$$

5.c.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + (1-x) \ln(1-x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \ln(1-x) = +\infty$$

donc φ n'est pas dérivable en 1.

$\mathcal{C}_f$ admet en 1 une demi-tangente verticale.

6. Pour x au voisinage de $-\infty$:

$$\frac{\varphi(x)}{-x \ln(1-x)} = \frac{x + (1-x) \ln(1-x)}{-x \ln(1-x)} = -\frac{1}{\ln(1-x)} - \frac{1}{x} + 1$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\ln(1-x)} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{-x \ln(1-x)} = 1$$

donc

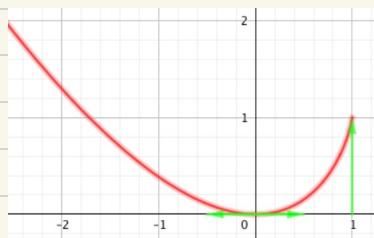
$$\varphi(x) \underset{-\infty}{\sim} -x \ln(1-x)$$

on $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \ln(1-x) = +\infty$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$$

7.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(1-x) = -\infty$$

donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $-\infty$.

8. φ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$

donc $\int_0^1 \varphi(t) dt$ est bien définie.

$$x = 1-t \Leftrightarrow t = 1-x$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \Rightarrow dt = -dx$$

$$t=0 \Rightarrow x=1; t=1 \Rightarrow x=0$$

changement de

variable limite en

affine

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 (t + (1-t) \ln(1-t)) dt = \int_1^0 (1-x + x \ln(x)) (-dx) = (*)$$

$$(*) = \int_0^1 (1-x) dx + \int_0^1 x \ln(x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + I$$

$$(*) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. $\uparrow$

Conclusion:

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \frac{1}{4}$$

Partie B : Étude de deux séries.

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

9. Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$

10. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

11. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$

En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

12. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

13. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

14. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

9. Soient n de $\mathbb{N}^*$ et t de $[0, x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \stackrel{t \neq 1}{=} \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}$

10. Soit n de $\mathbb{N}^*$.

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt$$

donc, par linéarité de l'intégrale:

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt$$

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t) \right]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$x \in]0, 1[\Rightarrow 1-x > 0$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

11. Soit n de $\mathbb{N}^*$.

$$t \in [0, x] \Rightarrow 1-t \geq 1-x > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$$

donc, par compatibilité de l'intégrale avec l'ordre (les fonctions en présence étant $\mathcal{C}^0$ et les bornes étant dans l'ordre croissant):

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{or } x < 1 \Rightarrow x^{n+1} \leq 1$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(1-x)(n+1)}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)(n+1)} = 0$$

donc, invoquant le théorème de l'encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

12. Passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité de 10., il vient:

$$-\ln(1-x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Conclusion:

$$\text{La série de terme général } \frac{x^k}{k} \text{ converge, de somme: } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

13.a. $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{m+1-m}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$ $a=1 \quad b=-1$

13.b. Raisonnons sur les sommes partielles.

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^m \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^m \frac{x^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{x^{k+1}}{k+1} = x \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} - \sum_{k=2}^{m+1} \frac{x^k}{k} = (i)$

$(i) = x \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} - \left(\sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} - x \right) = x + (x-1) \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k}$

or $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

donc

$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x + (1-x) \ln(1-x) = \varphi(x)$

Conclusion:

la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ converge, de somme: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)} = \varphi(x)$

14. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$
↑
téléscopage

donc:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Annexe

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

B_k : "on tire une boule bleue au tirage k "

R_k : "on tire une boule rouge au tirage k "

15.a. Soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

$\{N=n\} = B_1 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap R_n$

Invokant la formule des probabilités composées:

$P(N=n) = P(B_1)P(B_2) \dots P(B_{n-1})P(R_n)$

$P(N=n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n}$

$\forall m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $P(N=m) = \frac{1}{m(m-1)}$

15.b. $\sum_{n \geq 2} m P(N=m) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ Nous reconnaissons la série harmonique qui est divergente!

Conclusion:

N n'admet pas d'espérance.

16. ligne à compléter:

while rd.random() < b/(b+1)

Partie C : Application en probabilité.

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé. On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

15. (a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{n(n-1)}.$

(b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance?

16. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N .

```
1 def simuleN():
2     b=1 #b designe le nbre de boules bleues dans l'urne
3     while rd.random() < ..... :
4         b=b+1
5     return b
```

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes.

On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Enfin, on définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$. Par exemple si $N = 3$ alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ mais si $N = 5$ alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

17. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}_{(N=n)}(T \leq x) = (F(x))^n.$

18. En déduire d'après la formule des probabilités totales et d'un résultat de la partie B :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))$$

19. On suppose dans cette question uniquement que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

(a) On rappelle que l'instruction `rd.random(n)` renvoie un vecteur ligne contenant n réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Écrire une fonction Python d'en-tête **def simuleT()** : qui renvoie une simulation de la variable T .

(b) On suppose la fonction précédente correctement écrite et on considère la fonction Python suivante :

```
def mystere():
    m=[]
    for k in range(3):
        s=np.zeros((1,1000))
        for j in range(1000):
            s[j]=simuleT()
        m.append(np.mean(s))
    return m
```

6

À son appel, on obtient :

0.7474646 0.7577248 0.7470916

Que renvoie la fonction `mystere`? Que peut-on conjecturer sur la variable aléatoire T ?

$$(c) \text{ Montrer : } \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(d) En déduire que T est une variable aléatoire à densité.

(e) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que T admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T)$.

20. On suppose dans cette question uniquement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Rappeler une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

(b) Déduire de la question 18) une expression de la fonction de répartition de T .

(c) Montrer que T est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de T est la fonction :

$$g: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

(d) Justifier que T admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(T) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$P_{\{N=m\}}(T \leq x) = P(\max_{1 \leq i \leq m} (X_i) \leq x) = P(\bigcap_{i=1}^m \{X_i \leq x\}) = \prod_{i=1}^m P(X_i \leq x)$$

↑
indépendance mutuelle des X_i

$$\text{ou } \forall i \in \{1, \dots, m\}, P(X_i \leq x) = F(x)$$

donc, finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, P_{\{N=n\}}(T \leq x) = (F(x))^n$$

18. $(\{N=m\})_{m \geq 2}$ est un système complet d'événements

donc, invoquant le théorème des probabilités totales :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \sum_{m=2}^{+\infty} P(\{N=m\} \cap \{T \leq x\}) = \sum_{m=2}^{+\infty} P(N=m) P_{\{N=m\}}(T \leq x) = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)} (F(x))^m$$

donc, après le changement d'indice $m = k+1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{k+1}}{k(k+1)}$$

et le résultat de 13.b. induit finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \varphi(F(x))$$

19.a. `def simuleT() :`

`N=simuleN()`

`return np.max(nr.random(N))`

19.b. la fonction mystère crée trois échantillons de 1000 réalisations de la variable T puis stocke leurs moyennes empiriques respectives dans la liste m .

Les sorties donnent trois nombres proches de 0,75.

On peut donc conjecturer que :

$$T \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(T) = 0,75$$

19.c. $\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \varphi(F(x))$

or, dans cette question, les X_i suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

ce qui induit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Je pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = P(T \leq x)$$

19.d. Par invocation des théorèmes généraux, F_T est $\mathcal{C}^1$ (donc $\mathcal{C}^0$) sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, en 1 (*)

Etant une fonction de répartition, F_T est $\mathcal{C}^0$ à droite sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_T(x) = 0 = F_T(0) = \varphi(0) \Rightarrow F_T \text{ } \mathcal{C}^0 \text{ à gauche en } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = 1 = F_T(1) \Rightarrow F_T \text{ } \mathcal{C}^0 \text{ à gauche en } 1.$$

Ainsi, F_T est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. (**)

$$\left. \begin{array}{l} (*) \\ (**) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{T \text{ est une variable à densité.}}$$

Notons f_T une densité de T , on obtient f_T en dérivant F_T là où cela a un sens.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_T(x) = \begin{cases} \varphi'(x) = -\ln(1-x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

11.e. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt$ converge absolument et, le cas échéant :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt$$

$$\text{or } \forall t \in \mathbb{R} \setminus [0, 1[, t f_T(t) = 0$$

$$\text{et } \forall t \in [0, 1[, t f_T(t) \geq 0$$

donc la convergence absolue de l'intégrale étudiée revient à sa convergence.

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^1 -t \ln(1-t) dt = \int_0^1 (x-1) \ln(x) dx$$

$$x = 1-t \Leftrightarrow t = 1-x$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \Rightarrow dt = -dx$$

$$t=0 \Rightarrow x=1$$

$$t=1 \Rightarrow x=0$$

changement de variable affine

donc limite.

$$\text{or } I = \int_0^1 x \ln(x) dx = -\frac{1}{4}$$

et

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^1 \ln(x) dx = \lim_{A \rightarrow 0^+} [x \ln(x) - x]_A^1 = -1$$

$$\lim_{A \rightarrow 0^+} A \ln(A) = 0$$

donc l'intégrale étudiée converge, de valeur $-\frac{3}{4}$.

Conclusion:

T admet une espérance et: $E(T) = -3/4$

20.a.

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

20.b. $\forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = \Psi(F_x(x))$

Cas 1: $x < 0$

Dans ce cas: $F_T(x) = \Psi(0) = 0$

Cas 2: $x \geq 0$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1] \Rightarrow e^{-\lambda x} \in [0, 1]$$

$$\text{donc } \Psi(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} + (1 - 1 + e^{-\lambda x}) \ln(1 - 1 + e^{-\lambda x}) = (\Psi)$$

$$(\Psi) = 1 - e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} (-\lambda x)$$

$$(\Psi) = 1 - e^{-\lambda x} (1 + \lambda x)$$

Conclusion:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

20.c. Par invocation des théorèmes généraux, F_T est $\mathcal{C}^1$ (donc $\mathcal{C}^0$) sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. (*)

Etant une fonction de répartition, F_T est $\mathcal{C}^0$ à droite sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_T(x) = 0 = F_T(0) \Rightarrow F_T \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ à gauche en } 0.$$

Ainsi: F_T est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. (**)

Conclusion:

(*) , (**) $\Rightarrow$ T est à densité

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ -\lambda e^{-\lambda t} + \lambda(1 + \lambda t)e^{-\lambda t} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

De ce fait:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_T(t) = g(t)$$

20.d. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt$ converge absolument et, le cas échéant:

$$E(T) = \int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt$$

$$\text{or } \forall t \geq 0, \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} \geq 0$$

donc la convergence absolue de l'intégrale étudiée revient à sa convergence.

or, par référence probabiliste au moment d'ordre 2 d'une loi $E(\lambda)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2} = E(X_1^2)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} dt = \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} = \lambda E(X_1^2)$$

Conclusion:

$$T \text{ admet une espérance et: } E(T) = \frac{2}{\lambda}$$