

DEVOIR SURVEILLÉ N°7

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités, dans la mesure du possible, à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel informatique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1 : Étude de deux systèmes différentiels.

Liminaire : Résolution d'une équation différentielle.

c désigne un réel quelconque fixé.

On considère l'équation différentielle $[E]$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: $y' = -y + ce^{-t}$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène $[EH]$ associée.
2. Montrer que $\varepsilon : t \in \mathbb{R} \mapsto cte^{-t}$ est solution de $[E]$.
3. En déduire l'ensemble solution de $[E]$.

Partie I : Système différentiel n°1.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ associe : $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer $\text{Im}(f)$ et montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice F canoniquement associée à f .
7. F est-elle diagonalisable ?

8. Je pose : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Calculer FU .

Quelles déductions pouvez-vous faire ?

9. (a) Déterminer les réels a et b tels que : $F^2 = aF + bI$
 (b) En déduire que : $F^{-1} \in \text{vect}(I, F)$
 (c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe a_n, b_n de $\mathbb{R}$ tels que $F^n = a_nF + b_nI$ avec :

$$a_{n+1} = a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = 2a_n$$

- (d) Déterminer les expressions respectives de a_n et de b_n en fonction de n .

10. Montrer qu'il existe une matrice P , de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice diagonale D , dont les termes diagonaux sont classés dans l'ordre décroissant, telles que : $F = PDP^{-1}$
11. On considère les systèmes différentiels suivants :

$$[SF] \begin{cases} x'_1 = x_2 + x_3 + e^{-t} \\ x'_2 = x_1 + x_3 + 2e^{-t} \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad [SFH] \begin{cases} x'_1 = x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_1 + x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Je pose : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$

- (a) Déterminer l'ensemble des états d'équilibre de $[SFH]$.
- (b) Déterminer l'ensemble solution de $[SFH]$.
- (c) Déterminer la solution $\tilde{X}$ de $[SFH]$ vérifiant : $\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (d) Montrer que : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Sol}[SF] \iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = FX(t) + B(t)$
- (e) Soit X_P une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $[SF]$. Démontrer que X est solution de $[SF]$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $X - X_P$ est solution de $[SFH]$.
- (f) On considère, pour tout t réel : $Y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-3t \\ 1+3t \end{pmatrix}$
Montrer que Y est une solution particulière de $[SF]$.
- (g) Déterminer l'ensemble solution de $[SF]$.

Partie II : Système différentiel n°2.

On considère les matrices : $G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

On note g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à G ainsi que $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

12. Déterminer le rang de G .
13. Montrer que la famille $\mathcal{C}' = (U, V, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.
14. Montrer que G est semblable à la matrice : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
15. Montrer que G n'est pas diagonalisable.
16. On considère les systèmes différentiels : $[SG] \begin{cases} x'_1 = 2x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $[ST] \begin{cases} z'_1 = 2z_1 \\ z'_2 = -z_2 + z_3 \\ z'_3 = -z_3 \end{cases}$

Je pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = Q^{-1}X$

- (a) Montrer que : $X \in \text{Sol}[SG] \iff Z \in \text{Sol}[ST]$
- (b) Résoudre $[ST]$.

- (c) En déduire la solution X de $[SG]$ vérifiant : $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problème 2

Liminaire

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = x \ln(x)$

1. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On notera toujours h le prolongement obtenu...

2. Expliquer pourquoi l'intégrale $I = \int_0^1 t \ln(t) dt$ existe.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^1 t \ln(t) dt$.
En déduire la valeur de I .

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in] -\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ .

4. Montrer que la fonction φ est continue sur $] -\infty, 1]$.
5. (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.
(b) En déduire les variations de φ sur $] -\infty, 1]$.
(c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
6. Montrer que $\varphi(x) \underset{-\infty}{\sim} -x \ln(1-x)$ puis en déduire la limite de φ en $-\infty$.
7. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
8. Déduire du liminaire que : $\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries.

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

9. Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$
10. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$
11. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$
En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
12. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
13. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.
14. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Partie C : Application en probabilité.

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé. On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

15. (a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{n(n-1)}.$

(b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

16. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N .

```
1 def simuleN():
2     b=1 #b designe le nbre de boules bleues dans l'urne
3     while rd.random() < ..... :
4         b=b+1
5     return b
```

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes.

On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Enfin, on définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$. Par exemple si $N = 3$ alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ mais si $N = 5$ alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

17. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}_{(N=n)}(T \leq x) = (F(x))^n.$

18. En déduire d'après la formule des probabilités totales et d'un résultat de la partie B :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))$$

19. On suppose dans cette question uniquement que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

(a) On rappelle que l'instruction `rd.random(n)` renvoie un vecteur ligne contenant n réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Écrire une fonction Python d'en-tête **def simuleT()** : qui renvoie une simulation de la variable T .

(b) On suppose la fonction précédente correctement écrite et on considère la fonction Python suivante :

```
def mystere():
    m=[]
    for k in range(3):
        s=np.zeros((1,1000))
        for j in range(1000):
            s[j]=simuleT()
        m.append(np.mean(s))
    return m
```

À son appel, on obtient :

0.7474646 0.7577248 0.7470916

Que renvoie la fonction `mystere` ? Que peut-on conjecturer sur la variable aléatoire T ?

- (c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
- (d) En déduire que T est une variable aléatoire à densité.
- (e) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que T admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T)$.
20. On suppose dans cette question uniquement que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
- (a) Rappeler une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
- (b) Déduire de la question 18) une expression de la fonction de répartition de T .
- (c) Montrer que T est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de T est la fonction :

$$g : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- (d) Justifier que T admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(T) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.