

Problème 1 : Étude de deux systèmes différentiels.

Liminaire : Résolution d'une équation différentielle.

c désigne un réel quelconque fixé.

On considère l'équation différentielle $[E]$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: $y' = -y + ce^{-t}$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène $[EH]$ associée.
2. Montrer que $\varepsilon : t \in \mathbb{R} \mapsto cte^{-t}$ est solution de $[E]$.
3. En déduire l'ensemble solution de $[E]$.

Partie I : Système différentiel n°1.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ associe : $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer $\text{Im}(f)$ et montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice F canoniquement associée à f .
7. F est-elle diagonalisable?

8. Je pose : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Calculer FU .

Quelles déductions pouvez-vous faire?

9. (a) Déterminer les réels a et b tels que : $F^2 = aF + bI$
- (b) En déduire que : $F^{-1} \in \text{vect}(I, F)$
- (c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe a_n, b_n de $\mathbb{R}$ tels que $F^n = a_n F + b_n I$ avec :

$$a_{n+1} = a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = 2a_n$$

- (d) Déterminer les expressions respectives de a_n et de b_n en fonction de n .

10. Montrer qu'il existe une matrice P , de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice diagonale D , dont les termes diagonaux sont classés dans l'ordre décroissant, telles que : $F = PDP^{-1}$

11. On considère les système différentiels suivants :

$$[SF] \begin{cases} x'_1 = x_2 + x_3 + e^{-t} \\ x'_2 = x_1 + x_3 + 2e^{-t} \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad [SFH] \begin{cases} x'_1 = x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_1 + x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Je pose : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$

1. $[EH]$: $y' = -y$

Les solutions de $[EH]$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall k \in \mathbb{R}, f_k(t) = ke^{-t}$$

où k est une constante réelle.

$$\text{Sol}[E] = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto K e^{-t} / K \in \mathbb{R} \}$$

2. E est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, E'(t) = c e^{-t} - c t e^{-t}$$

$$E'(t) = c e^{-t} - E(t)$$

donc E est une solution particulière de $[E]$.

3. J'en déduis que les fonctions solutions de $[E]$ sont les fonctions y_K définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_K(t) = K e^{-t} + c t e^{-t}$$

où K est une constante réelle.

$$\text{Sol}[E] = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto K e^{-t} + c t e^{-t} / K \in \mathbb{R} \}$$

4. • $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{donc } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (i)$$

• Soient $u = (x, y, z), u' = (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3, \lambda$ de $\mathbb{R}$.

(objectif: $f(\lambda u + u') = \lambda f(u) + f(u')$)

$$\lambda u + u' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

$$f(\lambda u + u') = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (*)$$

$$(*) = (\lambda y + y' + \lambda z + z', \lambda x + x' + \lambda z + z', \lambda x + x' + \lambda y + y')$$

$$(*) = (\lambda(y + z) + y' + z', \lambda(x + z) + x' + z', \lambda(x + y) + x' + y')$$

$$(*) = \lambda(y + z, x + z, x + y) + (y' + z', x' + z', x' + y')$$

$$(*) = \lambda f(u) + f(u')$$

De ce fait: f est linéaire. (ii)

Conclusion:

(i)

(ii)

$$\Rightarrow f \text{ endomorphisme de } \mathbb{R}^3.$$

5. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$$\left. \begin{array}{l} B = (e_1, e_2, e_3) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ \text{ou } f(e_1) = (0, 1, 1) \quad f(e_2) = (1, 0, 1) \text{ et } f(e_3) = (1, 1, 0) \end{array}$$

$$\text{donc } \text{Im}(f) = \text{vect}((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$$

Étudions la liberté de la famille $\mathcal{F} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$.

Soient a, b, c de $\mathbb{R}$ tels que :

$$a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\nabla)$$

Montrons alors que, nécessairement: $a=b=c=0$

$$(\forall) (\Leftrightarrow) \left\{ \begin{array}{l} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=-c \\ a=-c \\ -2c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est libre

or $\text{card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Conclusion:

$$\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ automorphisme de } \mathbb{R}^3}$$

$$6. \left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = e_2 + e_3 \\ f(e_2) = e_1 + e_3 \\ f(e_3) = e_1 + e_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$7. {}^t F = F \Rightarrow F \text{ symétrique} \Rightarrow \boxed{F \text{ diagonalisable.}}$$

$$8. \left\{ \begin{array}{l} \boxed{FU = 2U} \\ U \neq 0_{\mathbb{R}^3} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{2 \in \text{Sp}(F) \text{ et } U \text{ est un vecteur propre de } F.}$$

$$9a. \text{Après un rapide calcul: } \boxed{F^2 = F + 2I} \quad a=1 \quad b=2$$

$$9b. \quad F^2 - F = 2I \Rightarrow F(F-I) = 2I \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}I\right) = I$$

donc $\boxed{F^{-1} = \frac{1}{2}F - \frac{1}{2}I \in \text{vect}(F, I)}$

9c. Notons $\mathcal{H}_n$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$" \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / F^n = a_n F + b_n I "$$

(I) Pour $n=0$.

$$F^0 = I = 0F + 1I \Rightarrow a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1$$

(H) Soit n de $\mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ l'est.

$$\mathcal{H}_n \text{ vraie} \Rightarrow \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / F^n = a_n F + b_n I$$

$$\text{or } F^{n+1} = F F^n$$

$$\text{donc } F^{n+1} = F(a_n F + b_n I) = a_n F^2 + b_n F$$

$$\text{or } F^2 = F + 2I$$

$$\text{donc } F^{n+1} = a_n(F + 2I) + b_n F = (a_n + b_n)F + 2a_n I$$

donc, en posant, $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$, on a bien $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie.

Conclusion: Par application du principe de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_n \text{ vraie et : } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

$$\text{g.d. } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$$

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

équation caractéristique: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$

Ainsi: $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = A(-1)^n + B2^n$

$$\text{or } a_1 = 1 \Rightarrow -A + 2B = 1 \Rightarrow A = 2B - 1$$

$$\text{et } a_2 = 1 \Rightarrow A + 4B = 1$$

$$\text{donc } 2B - 1 + 4B = 1$$

$$6B = 2$$

$$B = \frac{1}{3}$$

$$\text{et, par ricochet: } A = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

ainsi:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$$

cette égalité est encore valable pour $n=0$.

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}$$

$$\text{Il vient alors: } \forall n \geq 1, b_n = 2a_{n-1} = \frac{2}{3}((-1)^{n-1} + 2^{n-1}) = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

$$\text{or } b_0 = 1$$

$$\text{donc: } \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n)$$

$$10. F^2 - F - 2I = 0$$

donc $x^2 - x - 2$ est un polynôme annulateur de F

$$\text{or } x^2 - x - 2 = 0 \text{ a pour racines } -1 \text{ et } 2$$

donc -1 et 2 sont les seules valeurs propres possibles de F

-1 $\in \text{Sp}(F)$?

$$-1 \in \text{Sp}(F) \Leftrightarrow F + I \text{ non inversible.}$$

or $F + I$ a 3 lignes égales

donc $F + I$ est non inversible

$$\text{donc } -1 \in \text{Sp}(F).$$

Annexe

$$F = 1F + 0I \Rightarrow a_1 = 1 \quad b_1 = 0$$

$$F^2 = F + 2I \Rightarrow a_2 = 1 \quad b_2 = 2$$

$E_{-1}(F)$?

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$V \in E_{-1}(F) \Leftrightarrow FV = -V \Leftrightarrow (F+I)V = 0_{3,1} \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow z = -x-y$$

$$E_{-1}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / z = -x-y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Je pose: $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E_{-1}(F) = \text{vect}(V_1, V_2)$$

$$\Rightarrow (V_1, V_2) \text{ base de } E_{-1}(F) \text{ et } \dim E_{-1}(F) = 2$$

V_1, V_2 non colinéaires $\Rightarrow (V_1, V_2)$ libre

Now savons que: $2 \in \text{Sp}(F)$

Ainsi:

$$\text{Sp}(F) = \{-1; 2\}$$

De plus:

$$F \text{ diagonalisable} \Rightarrow \dim E_{-1}(F) + \dim E_2(F) = 3$$

$$\text{donc } \dim E_2(F) = 1$$

$$\text{or } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \text{ et } U \in E_2(F)$$

$$\text{donc } (U) \text{ est une base de } E_2(F).$$

Je pose: $\mathcal{E}'' = (U, V_1, V_2)$

Etant la concaténation de bases de sous-espaces propres associées à des valeurs propres distinctes, $\mathcal{E}''$ est libre

$$\text{or } \text{card } \mathcal{E}'' = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } \mathcal{E}'' \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ (base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) à $\mathcal{E}''$.

P est inversible et:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F = PDP^{-1} \quad \text{où}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer l'ensemble des états d'équilibre de $[SFH]$.

(b) Déterminer l'ensemble solution de $[SFH]$.

(c) Déterminer la solution $\tilde{X}$ de $[SFH]$ vérifiant : $\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) Montrer que : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Sol}[SF] \iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = FX(t) + B(t)$

(e) Soit X_P une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $[SF]$. Démontrer que X est solution de $[SF]$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $X - X_P$ est solution de $[SFH]$.

(f) On considère, pour tout t réel : $Y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-3t \\ 1+3t \end{pmatrix}$

Montrer que Y est une solution particulière de $[SF]$.

(g) Déterminer l'ensemble solution de $[SF]$.

Partie II : Système différentiel n°2.

On considère les matrices : $G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

On note g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à G ainsi que $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

12. Déterminer le rang de G .

13. Montrer que la famille $\mathcal{C}' = (U, V, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

14. Montrer que G est semblable à la matrice : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

15. Montrer que G n'est pas diagonalisable.

16. On considère les systèmes différentiels : $[SG] \begin{cases} x'_1 = 2x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad [ST] \begin{cases} z'_1 = 2z_1 \\ z'_2 = -z_2 + z_3 \\ z'_3 = -z_3 \end{cases}$

Je pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = Q^{-1}X$

(a) Montrer que : $X \in \text{Sol}[SG] \iff Z \in \text{Sol}[ST]$

(b) Résoudre $[ST]$.

(c) En déduire la solution X de $[SG]$ vérifiant : $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

M.a. $[SFH] \iff X' = FX$

F inversible

$(0,0,0)$ est le unique état d'équilibre de $[SFH]$.

M.b. F est diagonalisable et (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de F

donc :

$$\text{Sol}[\text{SFH}] = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) = a e^{2t} U + b e^{-t} V_1 + c e^{-t} V_2 / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Conclusion:

les solutions de [SFH] sont les (x_1, x_2, x_3) avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_1(t) = a e^{2t} + c e^{-t} \quad x_2(t) = a e^{2t} + b e^{-t} \quad x_3(t) = a e^{2t} - (b+c) e^{-t}$$

où a, b, c dérivent $\mathbb{R}$.

11.c.

$$\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1(0) = 0 \text{ et } x_2(0) = 1 \text{ et } x_3(0) = 0 \Leftrightarrow \text{(iii)}$$

$$\text{(iii)} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 1 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 1 - a \\ a - 1 + a + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1/3 \\ b = 2/3 \\ a = 1/3 \end{cases}$$

Conclusion:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{X}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} + 2e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$11.d. \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Sol}[\text{SF}] \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 + x_3 + e^{-t} \\ x'_2 = x_1 + x_3 + 2e^{-t} \\ x'_3 = x_1 + x_2 + 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{(iv)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = FX(t) + B(t)$$

$$11.e. \quad X \in \text{Sol}[\text{SF}] \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = FX(t) + B(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) - FX(t) = B(t) \Leftrightarrow \text{(v)}$$

$$\text{or } X_p \text{ solution de [SF]} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X'_p(t) - FX_p(t) = B(t)$$

$$\text{donc } \text{(v)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) - FX(t) = X'_p(t) - FX_p(t)$$

$$\text{(v)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) - X'_p(t) = FX(t) - FX_p(t)$$

donc, par linéarité de la dérivation:

$$\text{(v)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (X - X_p)'(t) = F(X - X_p)(t)$$

$$\text{(v)} \Leftrightarrow X - X_p \text{ solution de [FSH]}$$

Conclusion:

si X_p est une solution particulière de [SF], alors :

$$X \text{ solution de [SF]} \Leftrightarrow X - X_p \text{ solution de [FSH]}.$$

11.f. Objectif à atteindre: $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = FY(t) + B(t)$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-3t \\ 1+3t \end{pmatrix}$$

$$Y'(t) = \frac{1}{3}e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-3t \\ 1+3t \end{pmatrix} - \frac{1}{3}e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{e^{-t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4-3t \\ -2+3t \end{pmatrix}$$

$$FY(t) + B(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2+3t \\ 2-3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e^{-t}}{3} \begin{pmatrix} -2+3 \\ -2-3t+6 \\ -2+3t+0 \end{pmatrix} = \frac{e^{-t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4-3t \\ -2+3t \end{pmatrix}$$

De ce fait:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = FY(t) + B(t)}$$

Ainsi: Y est bien solution particulière de [SF].

11.g. X solution de [SF] $\Leftrightarrow X - Y$ solution de [SHF] $\Leftrightarrow (vi)$

$$(vi) \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / X(t) - Y(t) = ae^{2t}U + be^{2t}V_1 + ce^{2t}V_2$$

$$(vi) \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / X(t) = Y(t) + \begin{pmatrix} ae^{2t} + ce^{-t} \\ ae^{2t} + be^{-t} \\ ae^{2t} - (b+c)\frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + (c - \frac{1}{3})e^{-t} \\ ae^{2t} + (b - \frac{1}{3} + t)e^{-t} \\ ae^{2t} - (b+c + \frac{1}{3} - t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Conclusion:

les solutions (x_1, x_2, x_3) de [SF] sont définies par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_1(t) = ae^{2t} + (c - \frac{1}{3})e^{-t}, x_2(t) = ae^{2t} + (b - \frac{1}{3} + t)e^{-t}, x_3(t) = ae^{2t} - (b+c + \frac{1}{3} - t)e^{-t}$$

où a, b, c sont des constantes réelles.

12. Je note G_1, G_2, G_3 les vecteurs colonnes de G .

$$\text{rg}(G) = \dim \text{vect}(G_1, G_2, G_3)$$

soient a, b, c des réels tels que: $aG_1 + bG_2 + cG_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (*)$

Montrons alors que, nécessairement: $a = b = c = 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a=0 \\ a=-b=0 \end{cases}$$

De ce fait, (G_1, G_2, G_3) est libre

et donc :

$$\text{rg}(G) = 3$$

13. Soient a, b, c de $\mathbb{R}$ tels que : $aU + bV + cW = 0_{3,1} \Leftrightarrow (**)$

Montrons alors que, nécessairement : $a=b=c=0$

$$(**) \Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b - 2c = 0 & L_1 \\ a + b = 0 & L_2 \\ a + b + 3c = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b - 2c = 0 \\ 3b + 2c = 0 & L_2 - L_1 \rightarrow L'_2 \\ 3b + 5c = 0 & L_3 - L_1 \rightarrow L'_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b - 2c = 0 \\ 3b + 2c = 0 \\ 3c = 0 & L'_3 - L'_2 \rightarrow L''_3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

De ce fait, $\mathcal{E}'$ est libre

or $\text{card}(\mathcal{E}') = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

donc $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$Q = \text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{id}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

14. $GU = 2U$

$$GV = -V$$

$$GW = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V - W$$

$$\Rightarrow \text{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a deux matrices associées à un même endomorphisme sont semblables

donc G est semblable à T .

On a la relation : $G = QTQ^{-1}$ (*)

15. G étant semblable à T , il suffit de montrer que T n'est pas diagonalisable.

T est triangulaire de termes diagonaux 2 et -1

donc $\text{Sp}(T) = \{2, -1\}$.

$E_2(T)$?

soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(T)$.

$$X \in E_2(T) \Leftrightarrow TX = 2X \Leftrightarrow (T - 2I)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$$

$$E_2(T) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ libre}$$

$$\Rightarrow \dim E_2(T) = 1$$

$E_{-1}(T)$?

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$X \in E_{-1}(T) \Leftrightarrow TX = -1X \Leftrightarrow (T+I)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$E_{-1}(T) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ libre}$$

$$\Rightarrow \dim E_{-1}(T) = 1$$

Il vient alors :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(T)} \dim E_{\lambda}(T) = 2 < 3$$

donc T n'est pas diagonalisable

donc G n'est pas diagonalisable.

linéarité de la dérivation

16.a.

$$X \in \text{Sol}[SG] \Leftrightarrow X' = GX \xrightarrow{(*)} X' = QTQ^{-1}X \Leftrightarrow Q^{-1}X' = TQ^{-1}X \Leftrightarrow Z' = TZ$$

Conclusion :

$$X \in \text{Sol}[SG] \Leftrightarrow Z \in \text{Sol}[ST]$$

16.b.

$$(z_1, z_2, z_3) \in \text{Sol}[ST] \Leftrightarrow \begin{cases} \exists c_1 \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, z_1(t) = c_1 e^{2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}, z_2' = -z_1 + c_3 e^{-t} \\ \exists c_3 \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, z_3(t) = c_3 e^{-t} \end{cases}$$

donc, invoquant le résultat de la question 3. du liminaire :

$$(z_1, z_2, z_3) \in \text{Sol}[ST] \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{2t} \\ z_2(t) = c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} \\ z_3(t) = c_3 e^{-t} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\text{Sol}[ST] = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ (c_2 + c_3 t) e^{-t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix} / (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$16. X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Sol}[SG] \Leftrightarrow Q^{-1}X \in \text{Sol}[ST] \Leftrightarrow (\forall v)$$

$$(\forall \forall) \Leftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Q \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ (c_2 + c_3 t) e^{-t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = Q \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ (c_2 + c_3 t) e^{-t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ (c_2 + c_3 t) e^{-t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} - 2(c_2 + c_3 t) e^{-t} - 2c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t) e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t + 3c_3) e^{-t} \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi:

$$\text{Sol}[SG] = \left\{ X: t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} - 2(c_2 + c_3 t) e^{-t} - 2c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t) e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t + 3c_3) e^{-t} \end{pmatrix} / (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 2c_2 - 2c_3 = 0 & L_1 \\ c_1 + c_2 = 1 & L_2 \\ c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 2c_2 - 2c_3 = 0 \\ -3c_2 - 2c_3 = -1 & L_1 - L_2 \rightarrow L'_2 \\ -3c_3 = 1 & L_2 - L_3 \rightarrow L'_3 \end{cases}$$

→ système de Cramer

$$\text{Ainsi: } \begin{cases} c_1 = \frac{4}{9} \\ c_2 = \frac{5}{9} \\ c_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion:

La solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4e^{2t} - 2(5-3t)e^{-t} + 6e^{-t} \\ 4e^{2t} + (5-3t)e^{-t} \\ 4e^{2t} + (5-3t-9)e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4e^{2t} - 4e^{-t} + 6te^{-t} \\ 4e^{2t} + (5-3t)e^{-t} \\ 4e^{2t} - (4+3t)e^{-t} \end{pmatrix}$$