

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

Partie 1 : recherche des valeurs propres de M_a

1. Montrer que le réel λ est une valeur propre de M_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q .
2. Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q .
3. En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a .
4. Lorsque $a = 1$, la matrice M_1 est-il diagonalisable?

Partie 2 : réduction de la matrice M_a

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose a différent de 1 .

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

5. Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
6. Exprimer $f_a(e'_1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
7. Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e'_2 et e'_3 est stable par f_a c'est-à-dire :

$$f_a(F) \subset F$$

8. Montrer que l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est :

$$T_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Montrer que M_a n'est pas diagonalisable.

Partie 3 : étude d'un système différentiel

x_1 , x_2 et x_3 désignent des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On considère le système différentiel (S) :

$$\begin{cases} x'_1 = (a+2)x_1 - (2a+1)x_2 + ax_3 \\ x'_2 = x_1 \\ x'_3 = x_2 \end{cases}$$

Je pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

10. Montrer que : (x_1, x_2, x_3) solution de (S) $\iff X' = M_a X$
11. Résoudre l'équation différentielle ($\mathcal{E}_a$) : $y' = ay$
12. c désigne un réel fixé non nul et on considère l'équation différentielle ($\mathcal{D}$) : $z' = z + ce^t$
 - (a) Rechercher une solution particulière g de ($\mathcal{D}$) de la forme $g(t) = \alpha te^t$.
 - (b) Donner l'ensemble solution de ($\mathcal{D}$).
13. Déterminer l'ensemble solution du système différentiel $Z' = T_a Z$ où $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
14. En déduire l'ensemble solution de (S).

1. Soit λ de $\mathbb{R}$.

$$\lambda \in \text{Sp}(M_a) \Leftrightarrow M_a - \lambda I_3 \text{ non inversible}$$

Appliquons la méthode de Gauss.

$$M_a - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} a+2-\lambda & -2a-1 & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ a+2-\lambda & -2a-1 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 \rightarrow L_2 \\ L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & R(\lambda) & -a \end{pmatrix} \quad (a+2-\lambda)L_1 - L_3 \rightarrow L'_3$$

$$\text{où } R(\lambda) = (a+2-\lambda)(-\lambda) + 2a+1$$

$$R(\lambda) = \lambda^2 - (a+2)\lambda + 2a+1$$

donc

$$M_a - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} \quad L'_3 - R(\lambda)L_2 \rightarrow L''_3$$

$$\text{où } Q(\lambda) = -a - R(\lambda)(-\lambda)$$

$$Q(\lambda) = -a + \lambda(\lambda^2 - (a+2)\lambda + 2a+1)$$

$$Q(\lambda) = \lambda^3 - (a+2)\lambda^2 + (2a+1)\lambda - a$$

Cette dernière réduite de Gauss de $M_a - \lambda I_3$ est triangulaire de termes diagonaux 1 et $Q(\lambda)$

donc :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow Q(\lambda) = 0$$

$$\text{où } Q \text{ est fonction polynôme définie par : } \underline{Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a}$$

$$2. \quad Q(1) = 1 - (a+2) + 2a+1 - a = 0 \Rightarrow \underline{1 \text{ racine de } Q.}$$

$$3. \quad 1 \text{ racine de } Q \Rightarrow Q(x) \text{ factorisable par } (x-1).$$

Effectuons une division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x + a & x-1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} & x^2 - (a+1)x + a \\ \quad (a-1)x^2 + (2a+1)x & \\ \quad \underline{-(a-1)x^2 + (a+1)x} & ax - a \\ \quad \quad \quad ax - a & \\ \quad \quad \quad \underline{-(ax - a)} & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = (x-1)(x^2 - (a+1)x + a)$$

or 1 est racine évidente de $x^2 - (a+1)x + a$
donc l'autre racine est a .

Ainsi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x-1)^2(x-a)$$

Cas 1: $a=1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x-1)^3 \quad \underline{Q \text{ a pour unique racine } 1.}$$

Cas 2: $a \neq 1$

Q a exactement deux racines: 1 et a .

4. Je suppose $a=1$.

$$\text{Alors: } \text{Sp}(M_1) = \{1\}$$

Supposons M_1 diagonalisable.

Il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$M_1 = P D P^{-1}$$

$$\text{or } \text{Sp}(M_1) = \{1\} \Rightarrow D = I_3$$

$$\text{donc } M_1 = P I_3 P^{-1} = I_3, \text{ absurde!}$$

Conclusion:

M_1 n'est pas diagonalisable.

5. Soit x, y, z des réels tels que:

$$x e'_1 + y e'_2 + z e'_3 = 0_E \Leftrightarrow (*)$$

Montrons alors que, nécessairement: $x=y=z=0$

$$(*) \Leftrightarrow x(a^2 e_1 + a e_2 + e_3) + y(e_1 + e_2 + e_3) + z(e_1 + e_2) = 0_E$$

$$(*) \Leftrightarrow (x a^2 + y + z z) e_1 + (a x + y + z) e_2 + (x + y) e_3 = 0_E$$

or (e_1, e_2, e_3) est libre

donc

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x a^2 + y + z z = 0 \\ a x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x a^2 - x + z z = 0 \\ a x - x + z = 0 \\ y = -x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x a^2 - x + z x - z a x = 0 \\ z = x - a x \\ y = -x \end{cases} \\ (*) \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - 2a + 1)x = 0 \\ z = x - a x \\ y = -x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 x = 0 \\ z = x - a x \\ y = -x \end{cases} &\xrightarrow{a \neq 1} \begin{cases} z = 0 \\ z = x - a x \Leftrightarrow x = y = z = 0 \\ y = -x \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion:

B' est libre.

3

6.

$$M_a \begin{pmatrix} a^1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2(a+2) - a(2a+1) + a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f_a(e'_1) = a e'_1}$$

7. Par des calculs similaires au précédent :

$$f_a(e'_2) = e'_2 \quad \text{et} \quad f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$$

$$\text{donc } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_a(xe'_2 + ye'_3) = x f_a(e'_2) + y f_a(e'_3) = xe'_2 + y(e'_2 + e'_3)$$

↑
linéarité de f_a

$$f_a(xe'_2 + ye'_3) = (x+y)e'_2 + ye'_3$$

$$\text{or } F = \text{vect}(e'_2, e'_3)$$

$$\text{donc } \forall u \in F, f(u) \in F$$

i.e.

$$\boxed{f_a(F) \subset F}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_a(e'_1) = ae'_1 \\ f_a(e'_2) = e'_2 \\ f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3 \end{array} \right\} \Rightarrow T_a = \text{mat}_B(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_a(e'_1) \\ f_a(e'_2) \\ f_a(e'_3) \end{matrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix}$$

9. T_a est triangulaire de termes diagonaux a et 1

$$\text{donc } \text{Sp}(T_a) = \{a, 1\}$$

$$\underline{E_1(T_a)} ?$$

$$\text{Soit } V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$V \in E_1(T_a) \Leftrightarrow T_a V = V \Leftrightarrow \begin{cases} ax = x \\ y + z = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$a \neq 1$$

$$\text{donc } E_1(T_a) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{or } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \quad \text{donc } \underline{\dim E_1(T_a) = 1}$$

$$\underline{E_a(T_a)} ?$$

$$\text{Soit } V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$V \in E_a(T_a) \Leftrightarrow T_a V = aV \Leftrightarrow \begin{cases} ax = ax \\ y + z = ay \\ z = az \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ (a-1)y = z \\ (a-1)z = 0 \end{cases}$$

$$a \neq 1$$

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } E_a(T_a) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{or } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \quad \text{donc } \underline{\dim E_a(T_a) = 1}.$$

Il vient alors :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(T_a)} \dim E_\lambda(T_a) = 2 \neq 3$$

donc, invoquant le théorème fondamental de réduction:

T_a n'est pas diagonalisable

ou M_a est semblable à T_a

donc

M_a n'est pas diagonalisable.

10. Trivial...

11. $\text{Sol}(Z_a) = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto ke^{at} / k \in \mathbb{R} \}$

12. g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \alpha e^t + \alpha t e^t$$

$$g \text{ solution de (D)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = g(t) + c e^t \Leftrightarrow \text{(ii)}$$

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha e^t + \alpha t e^t = \alpha e^t + c e^t$$

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow \alpha = c$$

$$\uparrow \quad \forall t, e^t \neq 0$$

Conclusion:

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = c t e^t$$

12.b (DH): $z' = z$

$$\text{Sol}(DH) = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto k e^t / k \in \mathbb{R} \}$$

donc:

$$\text{Sol}(D) = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto k e^t + c t e^t / k \in \mathbb{R} \}$$

13.

$$Z' = T_a Z \Leftrightarrow \begin{cases} z'_1 = \alpha z_1 \\ z'_2 = z_2 + z_3 \\ z'_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(t) = c_1 e^t \\ z_2(t) = z_2 + c_3 e^t \\ z_3(t) = c_3 e^t \end{cases}, (c_1, c_3) \in \mathbb{R}^2$$

$$Z' = T_a Z \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{at} \\ z_2(t) = c_2 e^t + c_3 t e^t \\ z_3(t) = c_3 e^t \end{cases}, (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$$

14. Je pose: $Z = P_a^{-1} X \quad Z' = P_a^{-1} X'$ (par linéarité de la dérivation)

$$Z' = T_a Z \Leftrightarrow P_a^{-1} X' = T_a P_a^{-1} X \Leftrightarrow P_a^{-1} X' = P_a^{-1} M_a P_a P_a^{-1} X \Leftrightarrow X' = M_a X$$

Je veux fait:

$$\text{Sol} \{ X' = M_a X \} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto P_a \begin{pmatrix} c_1 e^{at} \\ c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix} / (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$P_a \begin{pmatrix} c_1 e^{at} \\ c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 c_1 e^{at} + c_2 e^t + c_3 t e^t + 2c_3 e^t \\ a c_1 e^{at} + c_2 e^t + c_1 t e^t + c_3 e^t \\ c_1 e^{at} + c_2 e^t + c_3 t e^t \end{pmatrix}$$

Conclusion:

$$\text{Sol } \gamma_{X'} = M_a X_t = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 c_1 e^{at} + c_2 e^t + c_3 t e^t + 2c_3 e^t \\ a c_1 e^{at} + c_2 e^t + c_1 t e^t + c_3 e^t \\ c_1 e^{at} + c_2 e^t + c_3 t e^t \end{pmatrix} / (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$