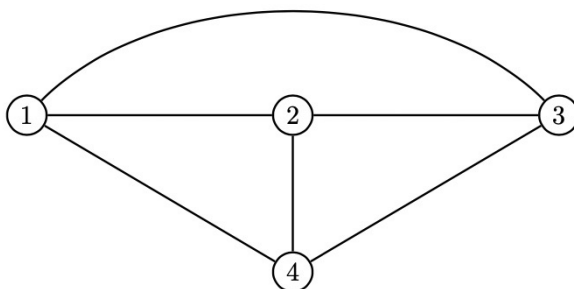


DEVOIR SURVEILLÉ N°5

Exercice 1

Partie I : étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathcal{G}$ suivant :



1. Quel est l'ordre de $\mathcal{G}$?
2. Rappeler la formule d'Euler (aussi appelée formule des poignées de mains) et retrouver la taille de G .
3. $\mathcal{G}$ est-il complet ? Quel est son nombre chromatique ?
4. $\mathcal{G}$ est-il eulérien ? Le cas échéant, donner un cycle eulérien de $\mathcal{G}$.
5. Donner la matrice d'adjacence G de $\mathcal{G}$.
Déterminer la matrice H telle que : $G = H - I_4$
6. Calculer H^2 . En déduire H^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
7. A l'aide de la formule du binôme (dont on justifiera l'invocation), déterminer l'expression de G^n en fonction de n .

8. On donne : $G^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $G^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

- (a) Déterminer le nombre exact de chemins de longueur 3 allant du sommet 2 au sommet 4.
- (b) Déterminer le nombre exact de chemins de longueur au maximum 3 allant du sommet 2 au sommet 4.
- (c) Calculer $\sum_{i=0}^3 G^i$. Quel résultat cela vous permet-il de retrouver ?

1. $\mathcal{G}$ a 4 sommets donc l'ordre de $\mathcal{G}$ est 4.

2. Formule d'Euler: $\sum_{s \in \mathcal{G}} d(s) = 2t$
où t = nombre d'arêtes

$$\sum_{s \in \mathcal{G}} d(s) = 4 \times 3 = 12$$

La taille de $\mathcal{G}$ est 6.

3. Un sommet quelconque de $\mathcal{G}$ est adjacent à tous les autres sommets de $\mathcal{G}$.

De ce fait, $\mathcal{G}$ est complet. Son nombre chromatique est son ordre : 4

4. Soient s_i et s_j deux sommets quelconques distincts de $\mathcal{G}$.

Il est possible de trouver un chemin reliant s_i à s_j .

De ce fait, $\mathcal{G}$ est connexe

Tout sommet de G est de degré impair. } $\Rightarrow G$ ne peut être eulérien.
 G est connexe

5.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = H - I_4 \quad \text{où} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $H^2 = 4H$ $H^3 = HH^2 = H4H = 4H^2 = 16H = 4^{3-1}H$

donc, par une récurrence immédiate: $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $H^m = 4^{m-1}H$ avec $H^0 = I_4$

7. Soit $m \in \mathbb{N}$. $H(-I_4) = (-I_4)H$

donc il est licite d'appliquer la formule du binôme:

$$G^m = (H - I_4)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} H^k (-1)^{m-k} = (-1)^m I_4 + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} H^k (-1)^{m-k}$$

a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $H^k = 4^{k-1}H = \frac{1}{4}H \cdot 4^k$

donc $G^m = (-1)^m I_4 + \frac{1}{4}H \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} 4^k (-1)^{m-k}$

donc, appliquant de nouveau la formule du binôme:

$$G^m = (-1)^m I_4 + \frac{1}{4}H (-(-1)^m + 3^m)$$

Conclusion:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad G^m = (-1)^m I_4 + \frac{3^m - (-1)^m}{4} H$$

Annexe:

$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} 4^k (-1)^{m-k} = (x)$$

$$(x) = -(-1)^m + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 4^k (-1)^{m-k}$$

$$(x) = -(-1)^m + (4-1)^m$$

8.a. $\forall m \in \mathbb{N}, \quad G^m = (G_{i,j}^m)_{1 \leq i,j \leq 4}$

$G_{2,4}^3 = 7$ Il y a exactement 7 chemins de longueur 3 allant de s_2 à s_4 .

8.b. $\sum_{k=0}^3 G_{i,j}^k = 1 + 2 + 7 = 10$ Il y a exactement 10 chemins de longueur au maximum 3 allant de s_2 à s_4 .

8.c. $\sum_{i=0}^3 G^i = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$

$\sum_{i=0}^{4-1} G^i$ a tous ses coefficients strictement positifs

donc G est connexe.

Partie II : étude d'une matrice

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & a & c & d \\ d & b & a & c \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

9. De deux façons différentes, montrer que E est un espace vectoriel.
10. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
11. Donner la dimension de E .
12. (a) Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E .

9. Méthode 1 (en 3 •)

- Par construction : $E \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (i)
- $0_4 \in E \Rightarrow$ $E \neq \emptyset$ (ii)
- Soient M, N de E , λ de $\mathbb{R}$.

(objectif : $\lambda M + N \in E$)

$$M \in E \Rightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } M = \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & a & c & d \\ d & b & a & c \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$$

$$N \in E \Rightarrow \exists (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } N = \begin{pmatrix} a' & c' & d' & b' \\ b' & a' & c' & d' \\ d' & b' & a' & c' \\ c' & d' & b' & a' \end{pmatrix}$$

$$\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda c + c' & \lambda d + d' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda a + a' & \lambda c + c' & \lambda d + d' \\ \lambda d + d' & \lambda b + b' & \lambda a + a' & \lambda c + c' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' & \lambda b + b' & \lambda a + a' \end{pmatrix}$$

$$\text{Je pose : } a'' = \lambda a + a' \quad b'' = \lambda b + b' \quad c'' = \lambda c + c' \quad d'' = \lambda d + d'$$

Il vient alors :

$$\lambda M + N = \begin{pmatrix} a'' & c'' & d'' & b'' \\ b'' & a'' & c'' & d'' \\ d'' & b'' & a'' & c'' \\ c'' & d'' & b'' & a'' \end{pmatrix} \in E$$

$$\left. \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array} \right\} \Rightarrow E \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_4(\mathbb{R})$$

or tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

donc :

E est un espace vectoriel.

Méthode 2

$$E = \{ aI + cK + dL + bJ \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$E = \text{vect}(I, J, K, L)$$

De ce fait, E est un sous-espace vectoriel engendré de $M_4(\mathbb{R})$, de famille génératrice

(I, J, K, L)

or tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

donc :

E est un espace vectoriel.

10. soient a, b, c, d de $\mathbb{R}$ tels que :

$$aI + bJ + cK + dL = O_4 \Leftrightarrow (*)$$

Montrons alors que, nécessairement : $a = b = c = d = 0$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & a & c & d \\ d & b & a & c \\ c & d & b & a \end{pmatrix} = O_4 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

Conclusion :

$\mathcal{B} = (I, J, K, L)$ est libre.

11.

$$E = \text{vect}(I, J, K, L)$$

(I, J, K, L) libre

$\Rightarrow \mathcal{B}$ est une base de E

$$\text{or } \text{card } \mathcal{B} = 4$$

donc

$$\dim E = 4$$

12.a. Après calculs :

$$\begin{aligned} J^2 &= L \in E & K^2 &= L \in E & L^2 &= I_4 \in E & J^3 &= K \in E \\ L^3 &= LL^2 = LI_4 = L \in E \end{aligned}$$

12.b. $JK = JJ^3 = J^2J^2 = L^2 = I_4$

$$KJ = J^3J = I_4$$

$$KL = J^3J^2 = JJ^2J^2 = JL^2 = JI_4 = J \quad LK = J$$

$$JL = JK^2 = JKK = I_4K = K \quad LJ = K$$

De ce fait, JK, KJ, KL, LK, JL et LJ sont dans E .

12.c. Soient M, N de E .

$$M \in E \Rightarrow \exists! (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } M = aI + bJ + cK + dL$$

$$N \in E \Rightarrow \exists! (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } N = a'I + b'J + c'K + d'L$$

De ce fait, $MN = (aI + bJ + cK + dL)(a'I + b'J + c'K + d'L)$

MN est alors combinaison linéaire des matrices $I, J, K, L, J^2, K^2, L^2, JK, KJ, JL, LJ$ et LK, KL

or ces 13 dernières matrices sont dans E

donc, E étant un espace vectoriel, $MN \in E$.

Conclusion : E est stable par produit.

13. $L = L^t \Leftrightarrow L$ symétrique $\Rightarrow$ L diagonalisable.

14. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \text{Sp}(L) \Leftrightarrow L - \lambda I_4 \text{ non inversible.}$$

Appliquons la méthode de Gauss.

$$L - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_1 \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{matrix}$$

$$L - \lambda I_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda L_1 + L_3 \rightarrow L'_3 \\ \lambda L_2 + L_4 \rightarrow L'_4 \end{array}$$

Cette dernière réduite de Gauss de $L - \lambda I_4$ est triangulaire de termes diagonaux $1, 1, 1-\lambda^2$ et $1-\lambda^2$

donc $\lambda \in \text{Sp}(L) \Leftrightarrow 1-\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ou } \lambda=-1$

Bilan:

$$\text{Sp}(L) = \{-1, 1\}$$

$E_1(L)$?

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

dernière réduite de Gauss de $L - \lambda I_4$ avec $\lambda=1$

$$V \in E_1(L) \Leftrightarrow LV = V \Leftrightarrow (L - I_4)V = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=t \end{cases}$$

$$E_1(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid z=x \text{ et } y=t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \\ x \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid (x,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$E_1(L) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ non colinéaires} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ libre} \right\} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ base de } E_1(L)$$

Mutatis mutandis:

$$E_{-1}(L) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

15.a. Soient x, y, z et t de $\mathbb{R}$ tels que : $xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = 0 \Leftrightarrow (\forall)$

Montrons alors que, nécessairement: $x=y=z=t=0$.

$$(\forall) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 & L_1 \\ x-y+z-t=0 & L_2 \\ x+y-z-t=0 & L_3 \\ x-y-z+t=0 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+z=0 & 1/2(L_1+L_2) \rightarrow L'_2 \\ x+y=0 & 1/2(L_1+L_3) \rightarrow L'_3 \\ x+t=0 & 1/2(L_1+L_4) \rightarrow L'_4 \end{cases}$$

$$v) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=0 \\ y=z=t=-x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=0$$

De ce fait : $\mathcal{B}'' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est libre.

or $\text{Card } \mathcal{B}'' = 4 = \dim \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

donc $\mathcal{B}''$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$15.b. \quad \left. \begin{array}{l} Lu_1 = u_1 \\ u_1 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow u_1 \text{ vecteur propre de } L \text{ associé à la valeur propre } 1.$$

De même pour u_2 . $Lu_2 = u_2$

$$\left. \begin{array}{l} Lu_3 = -u_3 \\ u_3 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow u_3 \text{ vecteur propre de } L \text{ associé à la valeur propre } -1.$$

De même pour u_4 . $Lu_4 = -u_4$

$$\left. \begin{array}{l} (J+K)u_1 = 2u_1 \\ u_1 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow u_1 \text{ vecteur propre de } J+K \text{ associé à la valeur propre } 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} (J+K)u_2 = -2u_2 \\ u_2 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow u_2 \text{ vecteur propre de } J+K \text{ associé à la valeur propre } -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} (J+K)u_3 = 0 \cdot u_3 \\ u_3 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow u_3 \text{ vecteur propre de } J+K \text{ associé à la valeur propre } 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} (J+K)u_4 = 0 \cdot u_4 \\ u_4 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow u_4 \text{ vecteur propre de } J+K \text{ associé à la valeur propre } 0.$$

Conclusion : u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de $J+K$.

(b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E .

(c) Établir enfin que E est stable par produit i.e. que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .

13. Montrer que L est diagonalisable.

14. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

$$15. \text{ On considère les vecteurs : } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(b) Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et $J+K$.

Partie III : étude d'une chaîne de Markov

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, \frac{1}{2}[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n . On a donc $X_0 = 1$.

- (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste $\mathcal{G}_2$. Quelle est la matrice de transition A de la chaîne de Markov étudiée ?
- (b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L .
- (a) Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer Au_i . En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter D et P .
- (b) Calculer P^2 puis en déduire P^{-1} .
- Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

- Que vaut C_0 ?

Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = C_n A$.

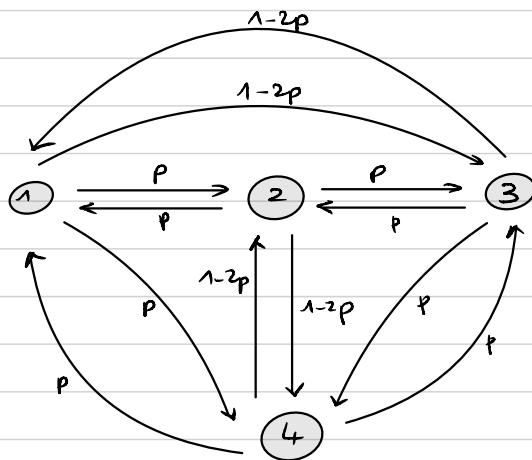
- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{4} C_0 P D^n P$

- Donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

- Déterminer l'état stable π de la chaîne de Markov.

- Khubes :** Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on reconnaîtra la loi.

16.a.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix}$$

16.b.

$$A = p(J + K) + (1-2p)L$$

17.a. $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, Au_i = p(J + K)u_i + (1-2p)Lu_i$

$$(J + K)u_1 = 2u_1 \text{ et } Lu_1 = u_1$$

donc $Au_1 = 2pu_1 + (1-2p)u_1 = u_1$

$$(J + K)u_2 = -2u_2 \text{ et } Lu_2 = u_2$$

donc $Au_2 = -2pu_2 + (1-2p)u_2 = (1-4p)u_2$

De même : $Au_3 = -(1-2p)u_3$ et $Au_4 = -(1-2p)u_4$

$$\left. \begin{array}{l} Au_1 = u_1 \\ u_1 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{u_1 \text{ vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 1.}$$

$$\left. \begin{array}{l} Au_2 = (1-4p)u_2 \\ u_2 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{u_2 \text{ vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 1-4p.}$$

$$\left. \begin{array}{l} Au_3 = -(1-2p)u_3 \\ Au_4 = -(1-2p)u_4 \\ u_3 \neq 0_{4,1} \quad u_4 \neq 0_{4,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{u_3 \text{ et } u_4 \text{ vecteurs propres de } A \text{ associés à la valeur propre } -(1-2p).}$$

À la lumière de 4.a), (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

De ce fait, A est diagonalisable.

Je note $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étant une matrice de passage, P est inversible.

Il vient alors :

$$A = P D P^{-1}$$

$$\text{où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$$

$$17.b. \quad P^2 = 4I \Rightarrow \boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}P}$$

18.a. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$(\{X_m = i\})_{1 \leq i \leq 4}$ est un système complet d'événements

donc, invoquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$P(X_{m+1} = 1) = \sum_{i=1}^4 P(\{X_m = i\} \cap \{X_{m+1} = 1\}) = \sum_{i=1}^4 P(X_m = i) P_{\{X_m = i\}}(X_{m+1} = 1)$$

$$P(X_{n+1}=1) = 0 P(X_n=1) + p P(X_n=2) + (1-2p) P(X_n=3) + p P(X_n=4)$$

Mutatis mutandis: $P(X_{n+1}=2) = p P(X_n=1) + 0 P(X_n=2) + p P(X_n=3) + (1-2p) P(X_n=4)$

$$P(X_{n+1}=3) = (1-2p) P(X_n=1) + p P(X_n=2) + 0 P(X_n=3) + p P(X_n=4)$$

$$P(X_{n+1}=4) = p P(X_n=1) + (1-2p) P(X_n=2) + p P(X_n=3) + 0 P(X_n=4)$$

Ce qui se traduit matriciellement par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = C_n A$$

18.b. Par une récurrence habituelle: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P D^n P^{-1}$

ou $P^{-1} = \frac{1}{4} P$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{4} P D^n P$

a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = C_n A \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = C_0 A^n$
↑
récurrence immédiate

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{4} C_0 P D^n P$ ou $C_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$

18.c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix}$$

$C_0 P D^n P$ est la première ligne de $P D^n P$.

$$P D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (1-4p)^n & (2p-1)^n & (2p-1)^n \\ 1 & -(1-4p)^n & (2p-1)^n & -(2p-1)^n \\ 1 & (1-4p)^n & -(2p-1)^n & -(2p-1)^n \\ 1 & -(1-4p)^n & -(2p-1)^n & (2p-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-4p)^n & (2p-1)^n & (2p-1)^n \\ 1 & -(1-4p)^n & (2p-1)^n & -(2p-1)^n \\ 1 & (1-4p)^n & -(2p-1)^n & -(2p-1)^n \\ 1 & -(1-4p)^n & -(2p-1)^n & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

où $a_n = 1 + (1-4p)^n + 2(2p-1)^n$ $b_n = 1 - (1-4p)^n$ $c_n = 1 + (1-4p)^n - 2(2p-1)^n$

$$d_n = 1 - (1-4p)^n$$

De ce fait:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad P(X_m=1) = \frac{1}{4} (1 + (1-4p)^m + 2(2p-1)^m)$$

$$P(X_m=2) = P(X_m=4) = \frac{1}{4} (1 - (1-4p)^m)$$

$$P(X_m=3) = \frac{1}{4} (1 + (1-4p)^m - 2(2p-1)^m)$$

18.d. $E_1({}^t A) = E_1(A) = \text{vect}(u_1) \Rightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

$\uparrow$
A symétrique

19. $0 < p < \frac{1}{2} \Rightarrow 2p-1 \in]-1, 1[$ et $1-4p \in]-1, 1[$

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} (1-4p)^m = \lim_{m \rightarrow +\infty} (2p-1)^m = 0$

donc $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} P(X_m=i) = P(X=i)$

où $X \rightarrow \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4\})$

a $\forall m \in \mathbb{N}, \quad X_m(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

donc, il est licite d'affirmer que:

$$\boxed{X_m \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$$