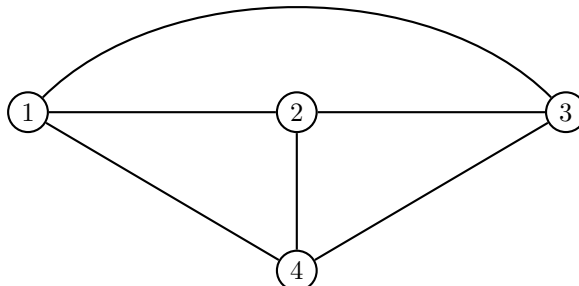


DEVOIR SURVEILLÉ N°5

Exercice 1

Partie I : étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathcal{G}$ suivant :



1. Quel est l'ordre de $\mathcal{G}$?
2. Rappeler la formule d'Euler (aussi appelée formule des poignées de mains) et retrouver la taille de G .
3. $\mathcal{G}$ est-il complet ? Quel est son nombre chromatique ?
4. $\mathcal{G}$ est-il eulérien ? Le cas échéant, donner un cycle eulérien de $\mathcal{G}$.
5. Donner la matrice d'adjacence G de $\mathcal{G}$.
Déterminer la matrice H telle que : $G = H - I_4$
6. Calculer H^2 . En déduire H^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
7. A l'aide de la formule du binôme (dont on justifiera l'invocation), déterminer l'expression de G^n en fonction de n .

8. On donne : $G^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $G^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

- (a) Déterminer le nombre exact de chemins de longueur 3 allant du sommet 2 au sommet 4.
- (b) Déterminer le nombre exact de chemins de longueur au maximum 3 allant du sommet 2 au sommet 4.
- (c) Calculer $\sum_{i=0}^3 G^i$. Quel résultat cela vous permet-il de retrouver ?

Partie II : étude d'une matrice

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & a & c & d \\ d & b & a & c \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

9. De deux façons différentes, montrer que E est un espace vectoriel.
10. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
11. Donner la dimension de E .
12. (a) Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E .

- (b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E .
- (c) Établir enfin que E est stable par produit i.e. que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .
13. Montrer que L est diagonalisable.
14. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
15. On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
- (b) Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et $J + K$.

Partie III : étude d'une chaîne de Markov

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, \frac{1}{2}[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.

- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n . On a donc $X_0 = 1$.

16. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste $\mathcal{G}_2$. Quelle est la matrice de transition A de la chaîne de Markov étudiée ?
- (b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L .
17. (a) Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer Au_i . En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter D et P .
- (b) Calculer P^2 puis en déduire P^{-1} .
18. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

- (a) Que vaut C_0 ?
Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = C_n A$.
- (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{4} C_0 P D^n P$
- (c) Donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
- (d) Déterminer l'état stable π de la chaîne de Markov.
19. **Khubes** : Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on reconnaîtra la loi.

Exercice 2

Liminaire.

On pose : $\lambda = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Montrer que : $e^\lambda \in]0; 1[$ et $e^\mu > 1$.

Résoudre dans $]0; 1[$ l'inéquation $(\mathcal{E}) : (\ln(x))^2 + \ln(x) - 1 > 0$

Partie A : Étude d'une fonction numérique.

Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par : $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\ln(x)} \right)$

1. Déterminer l'unique réel x de $]0; 1[$ tel que $f(x) = 0$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera toujours f ce prolongement.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$. Interpréter graphiquement.
4. Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$ et déterminer f' .
5. Déterminer le sens de variations de f .
6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Interprétation graphique?
7. Dresser le tableau de variations de f .
8. Montrer que f est concave sur $]0; 1[$.
9. Montrer que : $\forall x \in]0; 1[\quad f(x) \leq x$
10. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f .
On donne : $e^\lambda \simeq 0,2$ et $f(e^\lambda) \simeq 0,08$

Partie B : Étude d'une suite récurrente.

On désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left] 0; \frac{1}{e} \right[$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

11. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left] 0; \frac{1}{e} \right[$
12. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
13. Montrer que (u_n) converge.
14. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Partie C : Étude d'une série.

15. Montrer que : $\forall \alpha \in]0; 1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$
16. Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, en déduire un équivalent de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, sous la forme an^b avec a et b réels.
17. Si $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, rappeler un équivalent de $(1 + \varepsilon_n)^2 - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.
18. Montrer que : $(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2$
19. On admet le résultat suivant :

Si v et w sont deux suites réelles positives vérifiant $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ et si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge, alors :

$$\sum_{k=0}^n v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n w_k$$

En utilisant le résultat encadré admis, montrer que : $(\ln(u_n))^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$

20. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$ et en déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

Partie 1 : recherche des valeurs propres de M_a

1. Montrer que le réel λ est une valeur propre de M_a **si et seulement si** λ est racine du polynôme Q .
2. Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q .
3. En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a .
4. Lorsque $a = 1$, la matrice M_1 est-il diagonalisable ?

Partie 2 : réduction de la matrice M_a

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose a différent de 1.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

5. Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
6. Exprimer $f_a(e'_1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
7. Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e'_2 et e'_3 est stable par f_a c'est-à-dire :

$$f_a(F) \subset F$$

8. Montrer que l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est :

$$T_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Montrer que M_a n'est pas diagonalisable.

Partie 3 : étude d'un système différentiel

x_1, x_2 et x_3 désignent des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On considère le système différentiel (S) :

$$\begin{cases} x'_1 = (a+2)x_1 - (2a+1)x_2 + ax_3 \\ x'_2 = x_1 \\ x'_3 = x_2 \end{cases}$$

Je pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

10. Montrer que : (x_1, x_2, x_3) solution de $(S) \iff X' = M_a X$
11. Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_a)$: $y' = ay$
12. c désigne un réel fixé non nul et on considère l'équation différentielle $(\mathcal{D})$: $z' = z + ce^t$
 - (a) Rechercher une solution particulière g de $(\mathcal{D})$ de la forme $g(t) = \alpha te^t$.
 - (b) Donner l'ensemble solution de $(\mathcal{D})$.

13. Déterminer l'ensemble solution du système différentiel $Z' = T_a Z$ où $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

14. En déduire l'ensemble solution de (S) .