

Devoir surveillé n°5

Exercice 1.

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n-2)3^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.
2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{e^{-n}}{n^2}$.
3. Étudier la nature de la série de terme général $w_n = n \ln \left(1 + \frac{2}{n^5 + 1} \right)$

Exercice 2.

On considère deux variables réelles indépendantes X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$. On suppose que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = P(Y = n) = pq^n$$

1. Reconnaître la loi de $X + 1$. En déduire l'espérance et la variance de X .
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. (a) Déterminer $P(X \geq k)$ pour tout k de $\mathbb{N}$.
 (b) Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer la relation entre les probabilités $\{I = k\}$, $\{I \geq k\}$ et $\{I \geq k + 1\}$.
 (c) Déterminer la loi de $I = \min(X, Y)$.
- (d) Montrer que I admet une espérance de valeur $E(I) = \frac{q^2}{1 - q^2}$

Exercice 3.

Partie A : étude d'un endomorphisme, d'une matrice

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y + z, -3x - 2y - z, x + y)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f .
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. Déterminer la matrice A canoniquement associée à f .
5. Calculer AW où $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que pouvez-vous en déduire?
6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $A - \lambda I_3$ non inversible $\iff \lambda \in \{-1; 0; 1\}$
7. Déterminer les éléments propres de A .
8. La matrice A est-elle diagonalisable?

9. On considère la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

10. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $AP = PD$

Partie B : étude d'un système différentiel

On considère le système différentiel (S) suivant :

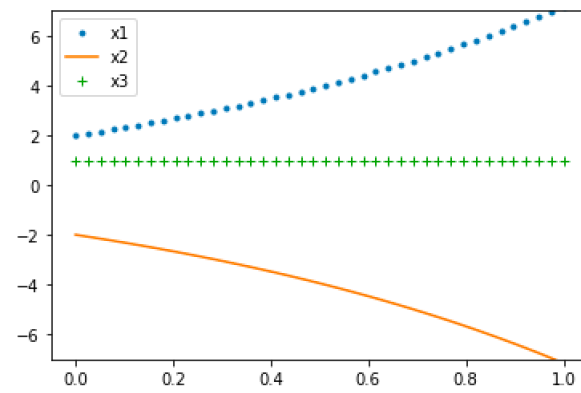
$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

11. Toutes les trajectoires de (S) sont-elles convergentes ?
12. Déterminer les états d'équilibre de (S).
13. Déterminer l'ensemble solution de (S).
14. Le programme suivant renvoie **le graphique numéro 1** en page 3.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
A=np.array([[2,1,1],[-3,-2,-1],[1,1,0]])
X0=np.array([2,-2,1])
t=np.linspace(0,1,40)
def syst(X,t):
    return np.dot(A,X)
M=odeint(syst,X0,t)
x1=M[:,0];x2=M[:,1];x3=M[:,2]
plt.ylim(-7,7)
plt.plot(t,x1,'.',label='x1')
plt.plot(t,x2,label='x2')
plt.plot(t,x3,'+',label='x3')
plt.legend()
plt.show()
```

- (a) Que renvoie le programme ci-dessus ?
Quelle conjecture pouvez-vous formuler quant à la convergence de la trajectoire considérée ?
- (b) Quelle conjecture pouvez-vous formuler quant à la fonction x_3 solution ?
- (c) Déterminer la trajectoire associée au programme étudié et prouvez vos conjectures.
15. Avec d'autres conditions initiales, on obtient les représentations graphiques de x_1 , x_2 et x_3 sur **le graphique numéro 2** page 3. Quelle conjecture pouvez-vous émettre quant à la trajectoire associée ?
16. Déterminer une des trajectoires associée à (S) qui converge vers le point d'équilibre ($-3, 3, 3$). Cette trajectoire ne doit pas être réduite à cet état d'équilibre...

graphique numéro 1 (question 14)



graphique numéro 2 (question 15)

