

# Devoir surveillé n°5

## Exercice 1.

1. Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^{2n-3}}$  converge et calculer sa somme.

A cet effet, on pourra remarquer que :  $n^2 = n^2 - n + n \dots$

2. Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{\ln(n^5 + 1) - 5 \ln(n)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1}$ .

1. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{2^{2n-3}}$$

Je pose  $q = \frac{1}{2}$ .

$$S_N = \sum_{n=1}^N n^2 q^{2n-3} = \sum_{n=1}^N (n^2 - n) q^{2n-3} + \sum_{n=1}^N n q^{2n-3}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N n(n-1)(q^2)^{n-2} \cdot q + \sum_{n=1}^N n(q^2)^{n-1} q^{-1}$$

$$S_N = q \sum_{n=1}^N n(n-1)(q^2)^{n-2} + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^N n(q^2)^{n-1}$$

$$\text{or } |q^2| = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n(n-1)(q^2)^{n-2} = \frac{2}{(1-q^2)^3} = \frac{2}{(3/4)^3} = \frac{2 \times 4^3}{3^3} = \frac{128}{27}$$

$$\text{et } |q^2| < 1 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n(q^2)^{n-1} = \frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{1}{(3/4)^2} = \frac{16}{9}$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{128}{27} + 2 \cdot \frac{16}{9} = \frac{160}{27}$$

Conclusion:

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^{2n-3}} \text{ converge avec : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{2n-3}} = \frac{160}{27}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5} = 0 \Rightarrow \ln(1+n^5) - 5 \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^5}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^5}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

$$\text{donc } u_n \sim \frac{1/n^5}{2/n} = \frac{1}{2n^4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0, \frac{1}{2n^4} > 0$$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^4}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^4} \text{ converge (Riemann avec } d=4 > 1)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}$$

Critère d'équivalence des séries à terme général positif.

## Exercice 2.

On considère deux variables réelles indépendantes  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $p \in ]0; 1[$  et  $q = 1 - p$ . On suppose que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = P(Y = n) = pq^n$$

1. Reconnaître la loi de  $X + 1$ . En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .
2. Déterminer la loi de  $X + Y$ .
3. (a) Déterminer  $P(X \geq k)$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ .  
 (b) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , déterminer la relation entre les probabilités  $\{I = k\}$ ,  $\{I \geq k\}$  et  $\{I \geq k + 1\}$ .  
 (c) Déterminer la loi de  $I = \min(X, Y)$ .  
 (d) Montrer que  $I$  admet une espérance de valeur  $E(I) = \frac{q^2}{1 - q^2}$

$$1. \quad X(\Omega) = \mathbb{N} \Rightarrow (X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X+1 = k) = P(X = k-1) = pq^{k-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{X+1 \sim \text{Gy}(p)}$$

$$E(X+1) = \frac{1}{p} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

$$V(X) = V(X+1) = \frac{q}{p^2}$$

$$2. \quad \underline{(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

$(\{X=i\})_{i \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements

donc, invoquant le théorème des probabilités totales :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X=i\} \cap \{X+Y=k\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X=i\} \cap \{Y=k-i\})$$

donc, par indépendance de  $X$  et de  $Y$ ,

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i) P(Y=k-i)$$

$$\text{or } Y(\Omega) = \mathbb{N} \Rightarrow \forall i > k, \quad k-i < 0 \Rightarrow P(Y=k-i) = 0$$

$$\text{donc } P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^k P(X=i) P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^k pq^i pq^{k-i} = (k+1)p^2q^k$$

Conclusion:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X+Y=k) = (k+1)p^2q^k}$$

$$3.a. \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} pq^i = pq^k \times \frac{1}{1-q} = q^k$$

$$3.b. \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \{I \geq k\} = \{I = k\} \cup \{I \geq k+1\}$$

donc, s'agissant d'une union d'événements incompatibles :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(I \geq k) = P(I = k) + P(I \geq k+1)$$

3.c.  $\min(X, Y) \in \mathbb{N}$ .

$X, Y$  indépendantes de même loi

Soit  $j \in \mathbb{N}$ .  $P(\min(X, Y) \geq j) = P(\{X \geq j\} \cap \{Y \geq j\}) \stackrel{\downarrow}{=} P(X \geq j)^2 = (q^j)^2 = q^{2j}$

donc  $P(\min(X, Y) = j) = P(\min(X, Y) \geq j) - P(\min(X, Y) \geq j+1)$

$$P(\min(X, Y) = j) = q^{2j} - q^{2(j+1)} = q^{2j}(1 - q^2) = (1 - q)(1 + q)q^{2j} = p(1 + q)q^{2j}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P(I = j) = p(1 + q)q^{2j}$$

3.d.  $I$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n P(I = n)$  converge

absolument et, le cas échéant :  $E(I) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(I = n)$

or  $\forall i \in \mathbb{N}, \quad i P(I = i) \geq 0$

donc la convergence absolue de la série étudiée revient à sa convergence

$$S_N = \sum_{n=1}^N n P(I = n) = \sum_{n=1}^N p(1 + q) n q^{2n} = p q^2 (1 + q) \sum_{n=1}^N n q^{2n-2} \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

or  $p \in ]0, 1[ \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n (q^2)^{n-1} = \frac{1}{(1 - q^2)^2}$

donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{p q^2 (1 + q)}{(1 - q^2)^2} = \frac{q^2}{p(1 + q)}$$

Conclusion :

$I$  admet une espérance, de valeur  $\frac{q^2}{p(1 + q)}$ .

### Exercice 3.

#### Partie A : étude d'un endomorphisme, d'une matrice

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

Soit  $f$  l'application définie par :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y + z, -3x - 2y - z, x + y)$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une base de  $\ker(f)$ . En déduire le rang de  $f$ .
3. Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .
4. Déterminer la matrice  $A$  canoniquement associée à  $f$ .
5. Calculer  $AW$  où  $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Que pouvez-vous en déduire?
6. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que :  $A - \lambda I_3$  non inversible  $\iff \lambda \in \{-1; 0; 1\}$
7. Déterminer les éléments propres de  $A$ .
8. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
9. On considère la famille  $\mathcal{B}' = (U, V, W)$  où  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que la famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .

10. Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que :  $AP = PD$

1. •  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y + z, -3x - 2y - z, x + y) \in \mathbb{R}^3$

donc :  $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  (\*)

• Soient  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$ .

$$f(\lambda u + u') = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (\lambda)$$

$$(\lambda) = (2(\lambda x + x') + \lambda y + y' + \lambda z + z', -3(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y')$$

$$(\lambda) = (\lambda(2x + y + z) + 2x' + y' + z', \lambda(-3x - 2y - z) - 3x' - 2y' - z', \lambda(x + y) + x' + y')$$

$$(\lambda) = \lambda(2x + y + z, -3x - 2y - z, x + y) + (2x' + y' + z', -3x' - 2y' - z', x' + y')$$

$$(\lambda) = \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

donc  $f$  est linéaire (\*\*)

Conclusion:

(\*)  
(\*\*)  $\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.$

2. Soit  $u = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 & L_1 \\ -3x - 2y - z = 0 & L_2 \\ x + y = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow (ii)$$

$$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 & L_1 \\ -y + z = 0 & 3L_1 + 2L_2 \rightarrow L'_2 \\ -y + z = 0 & L_1 - 2L_3 \rightarrow L'_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi:  $\ker(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -z \text{ et } y = z \} = \{ (-z, z, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R} \}$

$$\ker(f) = \text{vect}((-1, 1, 1))$$

$$(-1, 1, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow ((-1, 1, 1)) \text{ libre}$$

$$\Rightarrow ((-1, 1, 1)) \text{ base de } \ker(f) \text{ et : } \dim \ker(f) = 1$$

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 < +\infty$$

$$3 = \text{rg}(f) + \dim \ker(f)$$

$$\Rightarrow \text{rg}(f) = 2$$

Théorème du rang

3.  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  base de  $\mathbb{R}^3$

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

$$\text{or } f(e_1) = (2, -3, 1) \quad f(e_2) = (1, -2, 1) \text{ et } f(e_3) = (1, -1, 0)$$

donc  $\text{Im}(f) = \text{vect}((2, -3, 1), (1, -2, 1), (1, -1, 0))$

or  $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = 2$

donc la famille  $((2, -3, 1), (1, -2, 1), (1, -1, 0))$  est liée

or les vecteurs  $(2, -3, 1)$  et  $(1, -2, 1)$  sont non colinéaires

donc la famille  $((2, -3, 1), (1, -2, 1))$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

$$4. \quad \left. \begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 - 3e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_1 - e_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

5.  $f(0, 1, -1) = (0, -1, 1) = -(0, 1, -1) \Rightarrow$

$$AW = -1W$$

$$\left. \begin{array}{l} AW = -W \\ W \neq 0_{3,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{-1 \in \text{Sp}(A) \text{ et } W \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } -1.}$$

6. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Appliquons la méthode de Gauss.

$$A - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ -3 & -2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -3\lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3L_1 + L_2 \rightarrow L'_2 \\ (2-\lambda)L_1 - L_3 \rightarrow L'_3 \end{matrix}$$

$$A - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -3\lambda-1 \\ 0 & 0 & R(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \xrightarrow{L'_3 - L'_2 \rightarrow L''_3} \text{ où } R(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 + 3\lambda + 1 = \lambda(\lambda+1)$$

Cette dernière réduite de Gauss de  $A - \lambda I_3$  est triangulaire de termes diagonaux 1,  $1-\lambda$  et  $R(\lambda)$

donc  $A - \lambda I_3$  non inversible  $\Leftrightarrow 1-\lambda=0$  ou  $\lambda(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1; 0; 1\}$

7. D'après ce qui précède:  $\text{Sp}(A) = \{-1; 0; 1\}$

$$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ a trois valeurs propres deux à deux distinctes} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \dim E_\lambda(A) = 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim E_{-1}(A) = 1 \\ -1 \in \text{Sp}(A) \\ W \in E_{-1}(A) \text{ et } W \neq 0_{3,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{(W) \text{ est une base de } E_{-1}(A).}$$

$$((-1, 1, 1)) \text{ base de } \ker(f) \Leftrightarrow \boxed{\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ base de } \ker(A) = E_0(A)}$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

dernière réduite de Gauss de  $A - \lambda I_3$  avec  $\lambda = 1$

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi:

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = -x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \Rightarrow \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ libre} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ base de } E_1(A).}$$

$$\left. \begin{array}{l} 8. \quad A \in M_3(\mathbb{R}) \\ A \text{ a 3 valeurs propres} \\ \text{deux à deux distinctes} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

9. Étant la considération de bases de sous-espaces propres associées à des valeurs propres distinctes,  $\mathcal{B}'$  est libre

$$\text{or } \text{card } \mathcal{B}' = 3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } \boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } M_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

Évidemment,  $\mathcal{B}'$  est constituée de vecteurs propres de  $A$ .

10. Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Étant une matrice de passage, } \underline{P \text{ est inversible.}}$$

Il vient alors :

$$AP = PD$$

$$\text{on } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Partie B : étude d'un système différentiel

On considère le système différentiel  $(S)$  suivant :

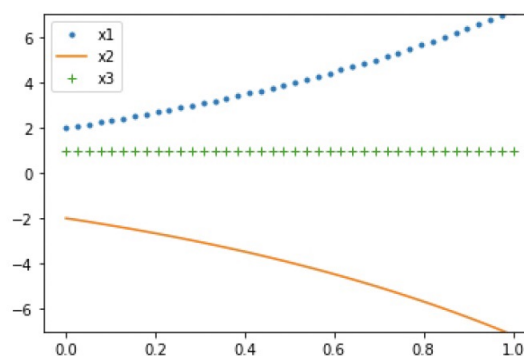
$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

11. Toutes les trajectoires de  $(S)$  sont-elles convergentes ?
12. Déterminer les états d'équilibre de  $(S)$ .
13. Déterminer l'ensemble solution de  $(S)$ .
14. Le programme suivant renvoie **le graphique numéro 1** en page 3.

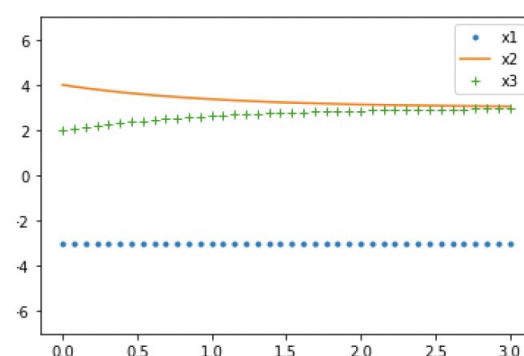
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
A=np.array([[2,1,1],[-3,-2,-1],[1,1,0]])
X0=np.array([2,-2,1])
t=np.linspace(0,1,40)
def syst(X,t):
    return np.dot(A,X)
M=odeint(syst,X0,t)
x1=M[:,0];x2=M[:,1];x3=M[:,2]
plt.ylim(-7,7)
plt.plot(t,x1,'.',label='x1')
plt.plot(t,x2,label='x2')
plt.plot(t,x3,'+',label='x3')
plt.legend()
plt.show()
```

- (a) Que renvoie le programme ci-dessus ?  
Quelle conjecture pouvez-vous formuler quant à la convergence de la trajectoire considérée ?
  - (b) Quelle conjecture pouvez-vous formuler quant à la fonction  $x_3$  solution ?
  - (c) Déterminer la trajectoire associée au programme étudié et prouvez vos conjectures.
15. Avec d'autres conditions initiales, on obtient les représentations graphiques de  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sur **le graphique numéro 2** page 3. Quelle conjecture pouvez-vous émettre quant à la trajectoire associée ?
16. Déterminer une des trajectoires associée à  $(S)$  qui converge vers le point d'équilibre  $(-3,3,3)$ . Cette trajectoire ne doit pas être réduite à cet état d'équilibre...

**graphique numéro 1 (question 14)**



**graphique numéro 2 (question 15)**



11. Le système (S) s'écrit matriciellement:  $X' = AX$

$$\text{ou } \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

A est diagonalisable et  $B' = (U, V, W)$  est une base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de A.

$$\text{or } 1 \in \text{Sp}(A) \quad \text{et } 1 > 0$$

donc il existe des trajectoires de (S) qui sont divergentes.

12. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

$$(a, b, c) \text{ point d'équilibre de (S)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -3a - 2b - c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) \in \ker(f)$$

$$\text{or } \ker(f) = \text{vect}((-1, 1, 1))$$

donc,  finalement:

d'ensemble des points d'équilibre de (S) est:  $\{(-k, k, k) / k \in \mathbb{R}\}$

13. A est diagonalisable et  $B' = (U, V, W)$  est une base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de A.

De ce fait:

$$\text{Sol(S)} = \left\{ X : t \in \mathbb{R}, \rightarrow a e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

14.a. Le programme renvoie les courbes représentatives des solutions  $x_1, x_2, x_3$  du système:  $X' = AX$  et  $x_1(0) = 2, x_2(0) = -2$  et  $x_3(0) = 1$ .

on conjecture le fait que:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = -\infty$

donc on conjecture le fait que la trajectoire afférente au programme est divergente.

14.b. Conjecture:  $x_3$  est constante.

14.c. Il existe un unique  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que:

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & x_1(t) = ae^t - b, \quad x_2(t) = -ae^t + b + ce^{-t}, \quad x_3(t) = b - ce^{-t} \\ x_1(0) = 2 & x_2(0) = -2 \quad x_3(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2 \Rightarrow a - b = 2$$

$$x_2(0) = -2 \Rightarrow -a + b + c = -2$$

$$x_3(0) = 1 \Rightarrow b - c = 1$$

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ -a + b + c = -2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ -2 + c = -2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

De ce fait, la trajectoire considérée dans le programme est :

$$\mathcal{C} = \{ (3e^t - 1, -3e^t + 1, 1) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

i.e.  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_1(t) = 3e^t - 1 \quad x_2(t) = -3e^t + 1 \quad \text{et} \quad x_3(t) = 1$

on a bien :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = -\infty$

et, de ce fait,  $\mathcal{C}$  diverge.

De plus,  $x_3$  est bien une fonction constante.

15. Conjecture :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = -3 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_3(t) = 3$   
La trajectoire  $\{ (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid t \in \mathbb{R} \}$  converge vers  $(-3, 3, 3)$ .

16.  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_1(t) = ae^t - b \quad x_2(t) = -ae^t + b + ce^{-t} \quad x_3(t) = b - ce^{-t}$

or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = -3 \Rightarrow \underline{a = 0 \text{ et } b = 3}$

donc  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_1(t) = -3 \quad x_2(t) = 3 + ce^{-t} \quad x_3(t) = 3 - ce^{-t}$

Il suffit de choisir  $c = 1$ .

Conclusion : La trajectoire  $\Gamma = \{ (-3, 3 + e^{-t}, 3 - e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R} \}$  converge vers l'état d'équilibre  $(-3, 3, 3)$ .