

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités, dans la mesure du possible, à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel informatique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Partie A

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$

(b) En déduire que : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt = 0$

2. Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

3. En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$

4. Utiliser la question 1) pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

5. Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$

Partie B

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne "pile" avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile". Si N prend la valeur n , le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur a gagné ».

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

6. Reconnaître la loi de N .

7. (a) Montrer que, si m est un entier naturel, le script

```
import numpy as np
m=int(input("m= "))
print(2*np.floor(m/2))
```

renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

- (b) Compléter les commandes Python suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages : « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
p=float(input("p= "))
N=rd.geometric(...)
X=rd.randint(...,...)
if ... :
    print("Le joueur a perdu.")
else:
    print("Le joueur a gagné.")
```

8. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j , la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$.
 (b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j + 1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$.
 (c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j - 1 \rrbracket$.
 (d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j \rrbracket$.
9. (a) Justifier que $P(X = 2k + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k + 1)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n , montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2^j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2^{j+1}} \right)$$

(b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$

10. (a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt = 0$

(b) Montrer que : $\sum_{k=0}^n P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)$.

(c) En déduire que : $P(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$.

11. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

- (b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q .

- (c) En déduire que $P(A) > \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Liminaire

1. Rappeler la définition de deux matrices semblables.
2. n désigne un entier tel que $n \geq 2$.
Soient A, B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ semblable à } B \\ C \text{ semblable à } B \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ semblable à } C$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer le spectre de A .
4. A est-elle diagonalisable ?
5. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que : $\ker\left(\varphi - \frac{1}{2}\text{id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \text{vect}(u)$ avec $u = 2e_1 + e_2$
7. Déterminer deux vecteurs V et W de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\ker(A - I_3) = \text{vect}(V) \text{ et } \ker(A - 2I_3) = \text{vect}(W)$$

Je note v (resp. w) le vecteur de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à V (resp. W).

8. Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser la matrice D de φ dans cette base.
9. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Quelle est la relation entre A, P et D ? Expliciter la matrice D^{-1} .
10. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ .
11. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z)$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

12. Expliciter la matrice M .
13. Calculer $(M - I_3)^3$.
14. Déterminer le spectre de M .
15. Montrer que M est inversible et que : $M^{-1} \in \text{vect}(I_3, M, M^2)$
16. M est-elle diagonalisable ?
17. (a) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$.
(b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.
18. Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
19. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.
20. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $N = T - I_3$.

21. Justifier que la matrice T est inversible.
22. Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
23. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2 .
24. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N .
 - (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
 - (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
 - (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
25. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x + n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$.

Partie I - Étude de f_1

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1 .
2. Déterminer les limites de f_1 aux bornes de $\mathcal{D}_{f_1}$.
Montrer que le graphe de f_1 admet une branche parabolique dont on donnera la direction asymptotique.
3. Justifier que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_{f_1}$, exprimer $f_1'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f_1 . On ne justifiera pas les limites.
4. (a) Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1 .
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$: $f_1(x) \leq x + 1$.
5. Tracer la courbe représentative de f_1 . (On y fera figurer la tangente en 0.)

Partie II - Étude d'une suite implicite.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n .
7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$
(b) En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.
8. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.
(b) En déduire la limite de la suite (α_n) .
9. (a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(\ln(n) + 2) = 1$
On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que : $\forall n \geq n_0, h_n(\ln(n) + 2) > 0$
(b) Montrer que, pour tout $n \geq n_0$: $\alpha_n < \ln(n) + 2$.
(c) En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie III - Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la Question 8.(a).
11. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie un couple $[c, n]$ où c est une valeur approchée de α_1 à eps près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie et n le nombre d'étapes nécessaires à la recherche de la valeur approchée.

```
import numpy as np
def alpha_1(eps):
    a=1;b=3;n=1
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if .....
            b=c
        else:
            .....
        n=.....
    return [c,n]
```

Partie IV : Valeur approchée de α_1 par la méthode du point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$
13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$
14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
15. Conclure quant à la limite de la suite (u_n) .
16. Écrire une fonction Python d'en-tête

def valap(eps) :

prenant en argument un réel $\text{eps} > 0$ et qui renvoie un couple (u_n, n) tel que : $|u_n - \alpha_1| < \text{eps}$