

## Exercice 3

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x + n)$  et  $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$ .

### Partie I - Étude de $f_1$

- Donner le domaine de définition  $\mathcal{D}_{f_1}$  de la fonction  $f_1$ .
- Déterminer les limites de  $f_1$  aux bornes de  $\mathcal{D}_{f_1}$ .  
Montrer que le graphe de  $f_1$  admet une branche parabolique dont on donnera la direction asymptotique.
- Justifier que  $f_1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}_{f_1}$ , exprimer  $f'_1(x)$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f_1$ . On ne justifiera pas les limites.
- (a) Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de  $f_1$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $x \in \mathcal{D}_{f_1}$  :  $f_1(x) \leq x + 1$ .
- Tracer la courbe représentative de  $f_1$ . (On y fera figurer la tangente en 0.)

### Partie II - Étude d'une suite implicite.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Montrer que l'équation  $f_n(x) = x$  admet une unique solution dans  $]0, +\infty[$ , notée  $\alpha_n$ .
- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :  $h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$   
(b) En déduire que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement monotone. On précisera son sens de variations.
- (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\alpha_n > 1 + \ln(n)$ .  
(b) En déduire la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .
- (a) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(\ln(n) + 2) = 1$   
On admet alors qu'il existe un rang  $n_0 \geq 2$  tel que :  $\forall n \geq n_0, h_n(\ln(n) + 2) > 0$   
(b) Montrer que, pour tout  $n \geq n_0$  :  $\alpha_n < \ln(n) + 2$ .  
(c) En déduire un équivalent simple de  $\alpha_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f_1(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \ln(x+1) \text{ existe} \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\mathcal{D}_{f_1} = ]-1, +\infty[$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1+} \ln(1+x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \ln(t) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1+} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \ln(t) = +\infty \quad (i)$$

$$\forall x > -1, \frac{f_1(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\text{et, par inégalités comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$  (ii)

(i) }  $\Rightarrow$  Le graphe de  $f_1$  admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox)  
 (ii) } au voisinage de  $+\infty$ .

3.  $x \mapsto x+1 \in^1$  sur  $Df_1$  }  $\Rightarrow x \mapsto \ln(1+x) \in^1$  sur  $Df_1$  }  $\Rightarrow f_1 \in^1$  sur  $Df_1$   
 $\ln \in^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  }  $x \mapsto 1 \in^1$  sur  $Df_1$

$\forall x > -1, f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow f_1$  strictement croissante sur  $Df_1$

|           |    |           |
|-----------|----|-----------|
| $x$       | -1 | $+\infty$ |
| $f_1'(x)$ |    | +         |
| $f_1(x)$  |    | $+\infty$ |
|           |    | $-\infty$ |

4.a.  $T_0: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

or  $f'(0) = 1 \quad f(0) = 1$

donc  $T_0: y = x + 1$

4.b. Soit  $d$  la fonction définie sur  $]-1, +\infty[$  par:

$d(x) = f_1(x) - x - 1$

Par invocation des théorèmes généraux,  $d$  est dérivable sur  $]-1, +\infty[$  et:

$\forall x > -1, d'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

|         |    |   |           |
|---------|----|---|-----------|
| $x$     | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $d'(x)$ |    | + | -         |
| $d(x)$  |    | 0 |           |

Il vient alors, par lecture du tableau de variations de  $d$ :

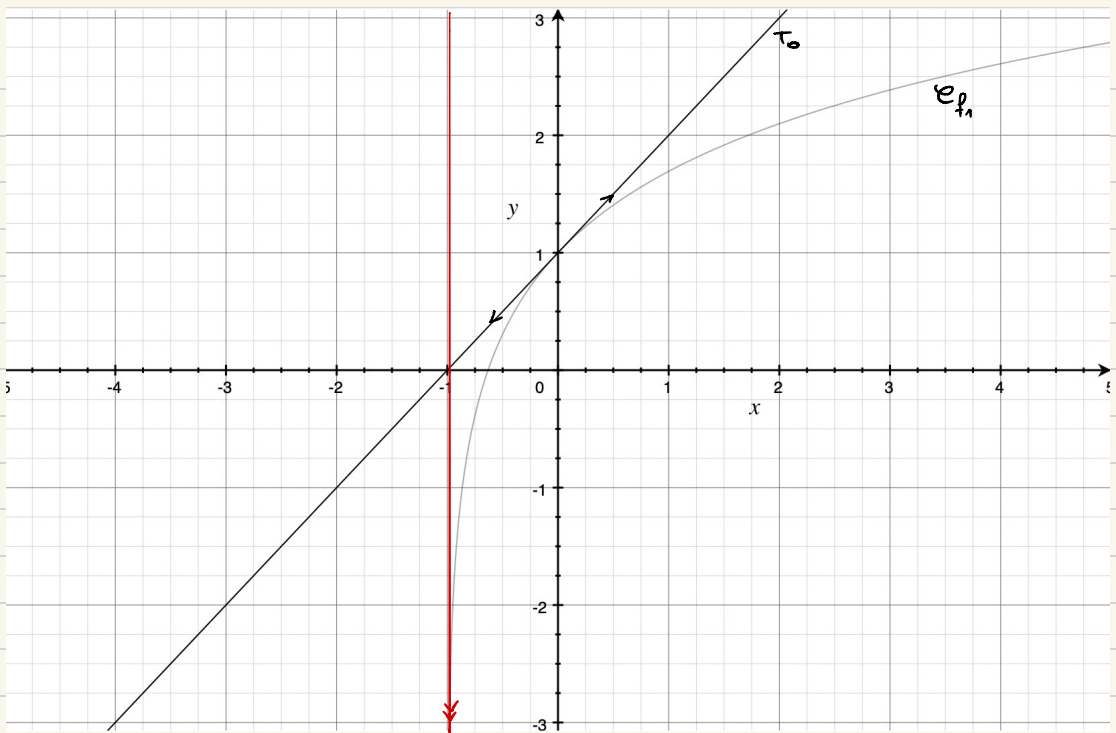
$\forall x > -1, d(x) \leq 0$

ce qui induit finalement:

$\forall x > -1, f_1(x) \leq x + 1$

5.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_1(x) = -\infty$

donc la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$ .



6. Par invocation des th  r  mes généraux,  $h_m$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x > 0, h'_m(x) = 1 - f'_m(x) = 1 - \frac{1}{x+m} = \frac{x+m-1}{x+m} > 0$$

$\uparrow$   $x > 0$  et  $m \geq 1$

donc  $h_m$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  (\*\*)

Par comparaisons,  $1 + \ln(x+m) = o(x+m)$   $\left. \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \\ x+m \sim x \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \ln(x+m) = o(x) \Rightarrow h_m(x) \sim x$   $\left. \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_m(x) = +\infty$  (\*\*\*)

$h_m$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow h_m \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$

(\*\*\*) et  $\lim_{x \rightarrow 0} h_m(x) = -1 - \ln(m)$  (\*\*)  $\left. \begin{array}{l} \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} h_m(x) = -1 - \ln(m) \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h_m(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow h_m \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } ]-1 - \ln(m), +\infty[$

$\text{or } (m \geq 1 \Rightarrow -1 - \ln(m) < 0) \Rightarrow 0 \in ]-1 - \ln(m), +\infty[$

donc, invoquant le th  r  me de la bijection :

$\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^* / h_m(\alpha) = 0$

autrement dit :

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^* / f_m(\alpha) = \alpha$$

7.a.  $h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1 - \ln(\alpha_{n+1} + n)$

ou  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} = 1 + \ln(n+1 + \alpha_{n+1})$

donc  $h_n(\alpha_{n+1}) = \cancel{1} + \ln(n+1 + \alpha_{n+1}) - \cancel{1} - \ln(\alpha_{n+1} + n)$

Conclusion:

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{n+1 + \alpha_{n+1}}{n + \alpha_{n+1}}\right)$$

7.b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{l} \alpha_{n+1} > 0, n \geq 1 \\ \alpha_{n+1} + n + 1 > \alpha_{n+1} + n > 0 \Rightarrow \frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} > 1 \\ \forall t > 1, \ln(t) > 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha_{n+1} > 0, n \geq 1 \\ \alpha_{n+1} + n + 1 > \alpha_{n+1} + n > 0 \end{array}} \right\} \Rightarrow h_n(\alpha_{n+1}) > 0$$

ou  $h_n(\alpha_n) = 0$

donc  $h_n(\alpha_{n+1}) > h_n(\alpha_n)$   $\alpha_{n+1}, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$

ou  $h_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

donc  $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

Conclusion:

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}$$

8.a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha_n = f_n(\alpha_n) = 1 + \ln(n + \alpha_n) > 1 + \ln(n)$$

$$\uparrow [\alpha_n > 0 \Rightarrow n + \alpha_n > n]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n > 1 + \ln(n)$$

8.b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \ln(n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$

9.a. Soit  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

$$h_n(\ln(n) + 2) = \ln(n) + 2 - f_n(\ln(n) + 2) = (\nabla)$$

$$(\nabla) = \ln(n) + 2 - 1 - \ln(\ln(n) + 2 + n)$$

$$(\nabla) = 1 + \ln(n) - \ln\left(n \left(1 + \frac{\ln(n) + 2}{n}\right)\right)$$

$$(\forall) = 1 + \cancel{\ln(m)} - \cancel{\ln(m)} - \ln\left(1 + \frac{\ln(m)+2}{m}\right) = 1 - \ln\left(1 + \frac{\ln(m)+2}{m}\right)$$

or, par croissance comparée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(m)+2}{m} = 0$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(\ln(m)+2) = 1}$$

9.b. Soit  $n$  de  $\llbracket m_0, +\infty \rrbracket$ .

$$h_n(\ln(m)+2) > 0$$

$$\text{donc } h_n(\ln(m)+2) > h_n(\alpha_n)$$

or  $h_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\text{donc } \ln(m)+2 > \alpha_n$$

$$\boxed{\forall n \geq m_0, \alpha_n < 2 + \ln(m)}$$

9.c.

$$\forall n \geq m_0, \quad 1 + \ln(m) < \alpha_n < 2 + \ln(m)$$

$$\text{or } n \geq m_0 \geq 2 \Rightarrow \ln(m) > 0$$

$$\text{donc } \forall n \geq m_0, \quad \frac{1}{\ln(m)} + 1 < \frac{\alpha_n}{\ln(m)} < \frac{2}{\ln(m)} + 1$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(m)} + 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(m)} + 1 = 1$$

donc, invoquant le théorème de l'encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\ln(m)} = 1$$

ce qui se traduit par:

$$\boxed{\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(m)}$$

### Partie III - Valeur approchée de $\alpha_1$ par dichotomie

10. Montrer que  $1 < \alpha_1 < 3$ . On pourra utiliser la Question 8.(a).
11. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie un couple  $[c, n]$  où  $c$  est une valeur approchée de  $\alpha_1$  à eps près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie et  $n$  le nombre d'étapes nécessaires à la recherche de la valeur approchée.

```
import numpy as np
def alpha_1(eps):
    a=1;b=3;n=1
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if .....
            b=c
        else:
            .....
        n=.....
    return [c,n]
```

### Partie IV : Valeur approchée de $\alpha_1$ par la méthode du point fixe

On définit la suite  $(u_n)$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \geq 1$
13. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$
14. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
15. Conclure quant à la limite de la suite  $(u_n)$ .
16. Écrire une fonction Python d'en-tête

def valap(eps) :

prenant en argument un réel  $\text{eps} > 0$  et qui renvoie un couple  $(u_n, n)$  tel que :  $|u_n - \alpha_1| < \text{eps}$

10.  $\alpha_1 > 1 + \ln(1) = 1$

$$h_1(3) = 3 - (1 + \ln(3+1)) = 2 - \ln(4) = 2 - 2\ln(2) > 0 \quad \ln(2) \approx 0,69$$

donc  $h_1(3) > h_1(\alpha_1)$

donc, par stricte monotonie de  $h_1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il vient :  $3 > \alpha_1$

Conclusion:

$$1 < \alpha_1 < 3$$

M.

```
import numpy as np
def alpha_1(eps):
    a=1;b=3;n=1
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if  $c-1-\text{np.log}(c+1) > 0$ :
            b=c
        else:
             $a=c$ 
        n =  $n+1$ 
    return [c,n]
```

12. Notons  $\mathcal{H}_n$  la propriété définie sur  $\mathbb{N}$  par: " $u_n$  existe et  $u_n \geq 1$ "

Initialisation: Pour  $n=0$ .

$$u_0 = 1 \Rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ vraie.}$$

Hérédité: Soit  $n$  de  $\mathbb{N}$  fixé. Supposons  $\mathcal{H}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{H}_{n+1}$  l'est.

$$\mathcal{H}_n \text{ vraie} \Rightarrow u_n \text{ existe et } u_n \geq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \text{ définie sur } ]-1, +\infty[ \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(u_n) \text{ existe i.e. } \underline{u_{n+1} \text{ existe.}}$$

$$\mathcal{H}_n \text{ vraie} \Rightarrow u_n \geq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) = 1 + \ln(2) \geq 1 \text{ i.e. } \underline{u_{n+1} \geq 1}$$

Ainsi  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion: Par application du principe de récurrence:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et:  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

13.  $\forall x \geq 1, f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$

$$\text{donc } \forall x \geq 1, |f_1'(x)| = \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

donc, invoquant l'inégalité des accroissements finis:

$$\forall x, y \in [1, +\infty[, |f_1(x) - f_1(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

$$\text{or } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1 \text{ et } \alpha_1 \geq 1$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, |f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1| \quad f_1(\alpha_1) = \alpha_1$$

et finalement:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

14. Notons  $R_n$  la propriété définie sur  $\mathbb{N}$  par: " $|u_n - \alpha_1| \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$ "

Initialisation: Pour  $n=0$ .

$$u_0 = 1 \text{ et } 1 < \alpha_1 < 3$$

$$\text{donc } |u_0 - \alpha_1| = \alpha_1 - 1 < 2 = (\frac{1}{2})^{0-1}$$

donc  $R_0$  est vraie.

Hérédité: Soit  $n$  de  $\mathbb{N}$  fixé. Supposons  $R_n$  vraie et montrons que  $R_{n+1}$  l'est également.

$$R_n \text{ vraie} \Rightarrow |u_n - \alpha_1| \leq (\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1| \leq (\frac{1}{2})^n$$

$$\uparrow \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{or } |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

$$\text{donc } |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc  $R_{n+1}$  est vraie.

Conclusion: Par application du principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$15. \quad \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

théorème de l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq u_n - \alpha_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha_1$$

16. def valap(eps):

$$n = 0; u = 1$$

while  $(1/2) ** (n-1) > \text{eps}$ :

$$n = n + 1$$

$$u = 1 + n \cdot \log(u+1)$$

return  $[n, u]$