

DS3K ALGÈBRE

Exercice 2

Liminaire

1. Rappeler la définition de deux matrices semblables.
2. n désigne un entier tel que $n \geq 2$.
Soient A , B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ semblable à } B \\ C \text{ semblable à } B \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ semblable à } C$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer le spectre de A .
4. A est-elle diagonalisable ?
5. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que : $\ker\left(\varphi - \frac{1}{2}\text{id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \text{vect}(u)$ avec $u = 2e_1 + e_2$
7. Déterminer deux vecteurs V et W de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\ker(A - I_3) = \text{vect}(V) \text{ et } \ker(A - 2I_3) = \text{vect}(W)$$

Je note v (resp. w) le vecteur de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à V (resp. W).

8. Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser la matrice D de φ dans cette base.
9. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Quelle est la relation entre A , P et D ? Expliciter la matrice D^{-1} .

$$10. \text{ On note } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } Q^2 \text{ et } QDQ.$$

11. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

1. Soient A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A et B sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

2. A semblable à $B \Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible / $A = PBP^{-1}$

C semblable à $B \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible / $C = QBQ^{-1} \Rightarrow B = Q^{-1}CQ$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow A = P(Q^{-1}CQ)P^{-1} \\ A = (PQ^{-1})C(QP^{-1}) \\ \Rightarrow (PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1} \end{array} \right\}$$

1

donc $A = (PQ^{-1})C(PQ^{-1})^{-1}$

donc A et C sont semblables.

3. A est triangulaire de termes diagonaux $1, \frac{1}{2}$ et $2 \Rightarrow \text{Sp}(A) = \{1, \frac{1}{2}, 2\}$

4. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

A a 3 valeurs propres distinctes

deux à deux

$\Rightarrow A$ diagonalisable.

5. $0 \notin \text{Sp}(A) \Rightarrow A$ inversible $\Rightarrow \varphi$ bijectif

De ce fait,

φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

6. Soit $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$.

$v \in \text{Ker}(f - \frac{1}{2} \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (f - \frac{1}{2} \text{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x, y, z) - \frac{1}{2}(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (*)$

$(*) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$

Ainsi:

$\text{Ker}(f - \frac{1}{2} \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y \text{ et } z = 0\} = \{(2y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\}$

$\text{Ker}(f - \frac{1}{2} \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}((2, 1, 0)) = \text{vect}(2e_1 + e_2)$

Finalement:

$\text{Ker}(f - \frac{1}{2} \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}(u)$

7. Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$V \in \text{Ker}(A - I) \Leftrightarrow (A - I_3)V = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -\frac{1}{2}y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } y = z = 0$

$\text{Ker}(A - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / x \in \mathbb{R} \right\}$

$\text{Ker}(A - I_3) = \text{vect}(V)$ ou $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v = (1, 0, 0) = e_1$

Mutatis mutandis:

$\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{vect}(W)$ où $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w = (1, 0, 1)$

8. Soient a, b, c de $\mathbb{R}$ tels que: $au + bv + cw = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (ii)$

Montrons alors que, nécessairement: $a = b = c = 0$

$$(ii) \Leftrightarrow a(2, 1, 0) + b(0, 1, 0) + c(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{c}{2} = 0 \\ b = -a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

De ce fait, B' est libre

or $\text{Card}(B') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

donc B' est libre maximale

donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left. \begin{aligned} u \in \text{Ker}(\varphi - \frac{1}{2}\text{id}_{\mathbb{R}^3}) &\Rightarrow \varphi(u) = \frac{1}{2}u \\ v \in \text{Ker}(A - I_3) &\Rightarrow Av = v \Rightarrow \varphi(v) = v \\ w \in \text{Ker}(A - 2I_3) &\Rightarrow Aw = 2w \Rightarrow \varphi(w) = 2w \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} \varphi(u) & \varphi(v) & \varphi(w) \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$$

9.

$$P = \text{Mat}_{B', B}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$10. Q^2 = I_3 \quad QD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad QDQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

$$11. Q^2 = I_3 \Rightarrow \underline{Q \text{ inversible et } Q^{-1} = Q.}$$

$$QDQ = D^{-1} \Rightarrow QDQ^{-1} = D^{-1} \Rightarrow D \text{ et } D^{-1} \text{ semblables}$$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A \text{ et } D \text{ semblables}$$

$\rightarrow$ A et D^{-1} semblables (**)

A inversible

$$\left. \begin{aligned} A &\text{ inversible} \\ A &= PDP^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = P D^{-1} P^{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} \text{ et } D^{-1} \text{ semblables}} (**)$$

Conclusion:

(*)

(**)

A et A^{-1} semblables.

Partie B : deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z)$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

12. Expliciter la matrice M .

13. Calculer $(M - I_3)^3$.

14. Déterminer le spectre de M .

15. Montrer que M est inversible et que : $M^{-1} \in \text{vect}(I_3, M, M^2)$

16. M est-elle diagonalisable ?

17. (a) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$.

(b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

18. Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.

19. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

20. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

12. $f(e_1) = (1, 0, 0) = e_1$

$f(e_2) = (0, 0, 1) = e_3$

$f(e_3) = (0, -1, 2) = -e_2 + 2e_3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

13. $M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(M - I_3)^3 = 0_3$

14. $(M - I_3)^3 = 0_3 \Rightarrow (X - 1)^3$ est un polynôme annulateur de M

or $(X - 1)^3$ a pour unique racine 1

donc 1 est la seule valeur propre possible de M

or $M - I_3$ a une ligne de zéros $\Rightarrow M - I_3$ non inversible

donc 1 est valeur propre de M .

Conclusion:

$$\text{Sp}(M) = \{1\}$$

15. $(M - I_3)^3 = 0_3$ donc $M^3 - 3M^2 + 3M - I_3 = 0_3$

$$M(M^2 - 3M + 3I_3) = (M^2 - 3M + 3I_3)M = I_3$$

donc

$$M \text{ est inversible et } M^{-1} = M^2 - 3M + 3I_3 \in \text{vect}(I_3, M, M^2)$$

16. Supposons M diagonalisable.

Il existe $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que

$$M = P D P^{-1}$$

$$\text{or } \text{Sp}(M) = \{1\} \Rightarrow D = I_3$$

$$\text{donc } M = P I_3 P^{-1} = P P^{-1} = I_3 : \text{ absurde!}$$

Conclusion:

M n'est pas diagonalisable.

17.a. Soit $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$.

$$u \in \text{Ker}(f - \text{id}) \Leftrightarrow (f - \text{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (M - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow y + z = 0 \Leftrightarrow z = -y$$

$$\text{De ce fait: } \text{Ker}(f - \text{id}) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -y \} = \{ (x, y, -y) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$$

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{vect}(u_1, u_2)$$

$$\Rightarrow (u_1, u_2) \text{ base de } \text{Ker}(f - \text{id})$$

$$u_1, u_2 \text{ non colinéaires} \Rightarrow (u_1, u_2) \text{ libre}$$

17.b. Je pose: $u_3 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$f(u_3) - u_3 = u_2 \Leftrightarrow (M - I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b + c = -1 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \text{ et } b + c = -1$$

a et c étant des paramètres, je peux les fixer à ma guise: $a = 0$ et $b = 0$

$$u_3 = (0, 0, -1) \text{ convient.}$$

17.c. Soient a, b, c de $\mathbb{R}$ tels que: $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (\forall)$

Montrons que, nécessairement: $a = b = c = 0$

$$(\forall) \Leftrightarrow a(1, 0, 0) + b(0, 1, -1) + c(0, 0, -1) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(\forall) \Leftrightarrow (a, b, -b-c) = (0, 0, 0)$$

$$(\forall) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

De ce fait, B_1 est libre

$$\text{or } \text{card}(B_1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

donc B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$18. \left. \begin{array}{l} u_1 \in \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{Q}^3}) \Rightarrow f(u_1) = u_1 \\ u_2 \in \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{Q}^3}) \Rightarrow f(u_2) = u_2 \\ f(u_3) = u_2 + u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = u_2 \Rightarrow f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2 \\ f(u_3) = -(-u_2) + u_3 \end{array} \right\} \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Etant deux matrices associées au même endomorphisme f , M_1 et M_2 sont semblables.

Après calculs: $M_1 M_2 = I_3$

20. Soit P (resp. Q) la matrice de passage de B à B_1 (resp. B_2).

Etant des matrices de passage, P et Q sont inversibles.

$$M = P M_1 P^{-1} \Rightarrow M_1 = P^{-1} M P \Rightarrow M_1^{-1} = P^{-1} M^{-1} P$$

donc $M_2 = P^{-1} M^{-1} P$

ou $M_2 = Q^{-1} M Q$

donc $Q^{-1} M Q = P^{-1} M^{-1} P \quad M = Q P^{-1} M^{-1} P Q^{-1}$

$$M = (Q P^{-1}) M^{-1} (Q P^{-1})^{-1}$$

Conclusion: M et M^{-1} sont semblables.

Annexe

$$M_1 M_2 = I_3$$

donc M_1 est inversible et :

$$M_2 = M_1^{-1}$$

Partie C : troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $N = T - I_3$.

21. Justifier que la matrice T est inversible.

22. Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.

23. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2 .

24. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N .

(a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.

(d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

25. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

21. T est triangulaire de toutes diagonales tous non nuls

donc T est inversible.

$$22. N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^3 = O_3$$

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - \cancel{N} + \cancel{N^2} + \cancel{N} - \cancel{N^2} + N^3 = I_3$$

$$23. \text{ Il vient alors : } T = I_3 + N \text{ inversible et : } T^{-1} = I_3 - N + N^2$$

$$24.a. N^2 \neq O_3 \Rightarrow g^2 \neq \theta \quad \text{ou } \theta \text{ est l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3$$

$$\text{donc } \exists u \in \mathbb{R}^3 / g^2(u) \neq O_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{or } N^3 = O_3 \Rightarrow g^3 = \theta$$

$$\text{donc } g^3(u) = O_{\mathbb{R}^3}$$

Conclusion:

$$\exists u \in \mathbb{R}^3 / g^2(u) \neq O_{\mathbb{R}^3} \text{ et } g^3(u) = O_{\mathbb{R}^3}$$

24.b. Soient a, b, c de $\mathbb{R}$ tels que:

$$a g^2(u) + b g(u) + c u = O_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (*)$$

Montrons alors que, nécessairement: $a = b = c = 0$

$$(*) \Rightarrow a g^4(u) + b g^3(u) + c g^2(u) = O_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow c g^2(u) = O_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\text{De ce fait : } (*) \Leftrightarrow a g^2(u) + b g(u) = O_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{or } g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$$

$$\text{donc } (*) \Rightarrow a g^2(u) + b g^2(u) = O_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow b g^2(u) = O_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\text{De ce fait : } (*) \Leftrightarrow a g^2(u) = O_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{or } g^2(u) \neq O_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{donc } \boxed{a = 0}$$

Ainsi, B_3 est libre

$$\text{or } \text{Card}(B_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\text{donc } B_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

24.c.

$$\left. \begin{aligned} g(g^2(u)) &= g^3(u) = O_{\mathbb{R}^3} \\ g(g(u)) &= 1g^2(u) + 0g(u) + 0u \\ g(u) &= 0g^2(u) + 1g(u) + 0u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Mat}_{B_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$24.d. \quad N^2 - N = \text{Mat}_{B_3}(g) \quad N = \text{Mat}_g(g)$$

$N^2 - N$ et N sont donc deux matrices associées au même endomorphisme g

$$\text{donc } N^2 - N \text{ et } N \text{ sont semblables.}$$

25. $N^2 - N$ et N sont semblables

donc il existe $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $N^2 - N = PNP^{-1}$

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2 = I_3 + PNP^{-1} = PI_3P^{-1} + PNP^{-1} = P(I_3 + N)P^{-1}$$

donc

$$T^{-1} = PTP^{-1}$$

Conclusion:

T et T^{-1} sont semblables.