

DEVOIR LIBRE N°4

Exercice 1 m désigne un paramètre réel. Résoudre le système (S_m) :

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y - z = m \end{cases}$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ suivant :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 \right\}$$

Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on note $s(A)$ la valeur $a_1 + a_2 + a_3$.

On note I la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs $s(I)$ et $s(J)$.

2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathcal{E}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

(a) Calculer AJ et JA .

(b) Montrer que : $A \in \mathcal{E} \iff AJ = JA$

(c) Vérifier que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.

(a) Soit λ un réel fixé.

Montrer que $A + \lambda B$ est un élément de $\mathcal{E}$ avec : $s(A + \lambda B) = s(A) + \lambda s(B)$

(b) Montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.

(c) Établir l'égalité : $s(AB) = s(A)s(B)$

5. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A .

(a) Montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.

(b) Montrer que : $s(A) \neq 0$

Exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.

6. Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose : $B = \frac{1}{3}s(A)J$ $C = A - B$

On considère l'ensemble : $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} / s(M) = 0\}$

(a) Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.

(b) Montrer que : $BC = CB = 0_3$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (A - B)^n = A^n - B^n$

(d) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?

(e) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathcal{F}$