

DEVOIR LIBRE DE DÉCEMBRE (2)

À rendre le 18/12.

Exercice 1

1. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation : $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5n^2 - 4n}{3}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{n+k}$
 - (a) Calculer S_1, S_2, S_3 .
 - (b) Calculer $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$.
 - (c) Montrer alors que : $S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Le but de cet exercice est de calculer la somme : $S_n = \sum_{p=0}^n p^2 \binom{2n}{2p}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$

1. On pose : $B(X) = 2X^2 + \frac{5}{2}X + \frac{1}{2}$.
 - (a) Montrer que B admet deux racines réelles, notées α et β dans la suite. Donner la forme factorisée de B .
 - (b) Soit R le reste de la division euclidienne de $f(X)$ par $B(X)$. Que dire sur le degré de R ? Déterminer $R(\alpha)$ et $R(\beta)$.
 - (c) En déduire l'expression développée de $R(X)$.
2. (a) Justifier que f , puis f' , sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x . (f'' est la dérivée de f').
 - (c) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(1+x)^{2n}$ et $(1-x)^{2n}$.
 - (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} x^{2p}$
 - (c) En déduire des expressions de $f'(1)$ et $f''(1)$ sous forme de sommes.
4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier p : $p^2 = a \cdot 2p(2p-1) + b \cdot 2p$
5. Déduire des questions précédentes une expression de S_n en fonction de n .

Exercice 3

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}}$

On admet : $2 < e < 3$

1. Montrer que φ est trois fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)$ et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
3. En déduire le sens de variation de φ' , et montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$
4. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
5. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Dresser le tableau de variations complet de φ .
7. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$.
Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.