

DEVOIR SURVEILLÉ n°4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités, dans la mesure du possible, à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel informatique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Partie A : Résultats utiles pour les parties suivantes.

- Montrer que : $\forall x \geq 0 \quad \ln(1+x) - x \leq 0$.
Montrer qu'il y a égalité uniquement pour $x = 0$.
- Montrer que : $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.
- (a) Montrer que : $\forall t \geq 0 \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$.
(b) En déduire que : $\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Partie B : Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.
- Montrer que : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.
- On *admet* la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f , c'est-à-dire :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x - \ln(1+x)$.
- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \ln(1+x)$.
- Montrer que, pour tout x au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.
En déduire un équivalent de $f(x) - f(0)$ pour x au voisinage de 0.
- Montrer f est continue en 0.
- Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
Expliciter une équation de la tangente à Γ en son point d'abscisse 0.
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, montrer que : $f'(x) = \frac{-x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2}{x^2(1+x)(\ln(1+x))^2}$.
- (a) Montrer que, pour tout x au voisinage de 0 : $-x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2 = -\frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$.
Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x^2(1+x)(\ln(1+x))^2$.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad g(x) = -x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, déterminer $g'(x)$ et montrer que : $g''(x) = \frac{2}{1+x} \times (\ln(1+x) - x)$.
- En déduire le signe de $g(x)$.
- Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Partie C : Étude d'une suite et de séries.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

12. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.
13. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone.
14. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on déterminera.
15. Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (u_{k+1} - u_k)$ converge et déterminer sa somme.
16. Montrer que : $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$
17. Quelle est la nature de la série de terme général u_n^2 ?
18. Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right)$ diverge.

Exercice 2.

Partie A : Étude d'une application linéaire.

On considère l'application L définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que L est linéaire.
2. L'application L peut-elle être bijective ?
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker(L)$.
4. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}(L)$. En déduire $\operatorname{Im}(L)$.
5. L'application L est-elle surjective ?

Partie B : Étude d'un endomorphisme.

On reprend les notations de la partie précédente.

α désigne un réel non nul.

On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f_\alpha(P) = P + \alpha L(P)X$$

6. Montrer que f_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Montrer que : $f_\alpha(X) = X$ et $f_\alpha(X^2) = \frac{2\alpha}{3}X + X^2$
Que pouvez-vous en déduire en ce qui concerne le spectre de f_α ? *Bien justifier...*
8. Écrire la matrice M_α de f_α relativement à la base $\mathcal{B}$.
9. Montrer que f_α a une **unique** valeur propre non nulle et indépendante de α .
10. Montrer que f_α est un automorphisme et en déduire le rang de f_α .
11. Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre $E(f_\alpha)$ de f_α . *Attention aux problèmes de forme !*
12. L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?
13. On considère les polynômes $R_1 = 1 - 3X^2$, $R_2 = X$ et $R_3 = 1 + \left(\frac{1}{2\alpha} - 3\right)X^2$.
Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (R_1, R_2, R_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

14. Rappeler la formule théorique d'une matrice de passage et donner la matrice Q de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
15. Déterminer la matrice M'_α de f_α relativement à la base $\mathcal{B}'$.
Écrire la relation entre les matrices M_α , M'_α et Q .
16. Déterminer f_α^{-1} .

Exercice 3.

Les parties A et B de cet exercice sont **mutuellement indépendantes** et peuvent être traitées dans l'ordre que vous souhaitez.

p désigne un élément de $]0; 1[$.

Liminaire (niveau¹ ECS).

a désigne un élément de $]0; 1[$.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de $u_1 = a$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = (2p - 1)u_n + 1 - p \quad (\star)$$

Reconnaître la nature de cette suite et exprimer u_n en fonction de n .

Partie A.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi à valeurs dans $\{-1, 1\}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X_n = 1) = p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires S_n et Y_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

1. Compléter la fonction Scilab ci-dessous qui prend en entrée n, p (désignant respectivement un entier n non nul et la probabilité p) puis renvoie Y , une simulation de Y_n .

```
function Y=simuleloi(n,p)
    Y=.....
    for i=1:.....
        if grand(1,1,.....,....,....)=..... then
            a=.....
        else
            a=.....
        end
        Y=.....*a
    end
endfunction
```

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $Y_n(\Omega)$.
3. Déterminer la loi de Y_2 .
4. Déterminer la loi de Y_3 .
5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = P(Y_n = 1)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie $(\star)$ puis donner la valeur de u_n en fonction de n .
6. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n admet une espérance et déterminer sa valeur.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n admet une variance et déterminer sa valeur.

1. Nan, je rigooooole, c'est de niveau CPES.

9. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_i = \frac{X_i + 1}{2}$.
Déterminer la loi de B_i ainsi que son espérance et sa variance.
10. En déduire la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
11. Écrire une fonction Scilab qui prend en entrée n et p puis renvoie une simulation de S_n .

Partie B.

Une gare dispose de deux guichets.

Trois clients notés C_1 , C_2 et C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1 , X_2 et X_3 les variables aléatoires respectivement égales à la durée d'opération des clients C_1 , C_2 et C_3 . Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1 , X_2 et X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0; 1[$) et qu'elles sont mutuellement indépendantes.

On note : $q = 1 - p$.

On considère l'événement A : " C_3 termine en dernier son opération."

Ainsi :

$$A = \{ \min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2) \}$$

On pose :

$$\Delta = |X_1 - X_2|.$$

12. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
13. Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.
14. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k)$
15. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1 + q}$
16. Montrer que Δ admet une espérance et déterminer sa valeur.
17. Montrer que : $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$
En déduire que Δ admet une variance et la calculer.
18. Montrer que : $A = \{X_3 > \Delta\}$
19. En déduire que : $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k) P(X_3 > k)$
Exprimer $P(A)$ en fonction de p et de q .
20. Nous allons écrire deux versions d'un programme qui effectue 10000 simulations de l'épreuve et compare la fréquence (empirique) f de l'événement A avec la probabilité théorique $P(A)$ déterminée précédemment.
 - (a) **Première méthode de calcul de f** : Compléter la première version suivante du programme de manière à ce que la variable N compte le nombre d'occurrences de l'événement A au cours des 10000 simulations.

```
p=input('Entrer p= ')
q=1-p
X1=grand(1,10000,'geom',p)
X2=grand(1,10000,'geom',p)
X3=grand(1,10000,'geom',p)
N=0
for k=1:10000 do
    if ..... then
        N=.....
    end
end
f = .....
P=(1+q^2)/((1+q)^2)
disp(f,'fréquence de A: ')
disp(P,'probabilité de A: ')
```

- (b) **Deuxième méthode de calcul de f :** En réalité, la boucle for n'est pas nécessaire car nous pouvons comparer directement deux matrices termes à termes. On rappelle que si M et N sont deux matrices de même taille, alors l'instruction $C = (M > N)$ renvoie une matrice booléenne C (i.e. ne contenant que vrai (1) ou faux (0)) dont chaque coefficient $C_{i,j}$ vaut 1 si $(M_{i,j} > N_{i,j})$ est vrai, et vaut 0 sinon.

Remplir la deuxième version du programme qui calcule f en une seule instruction. Elle utilisera une comparaison directe entre deux vecteurs lignes (du type $(M > N)$) ainsi que la commande `sum()`.

```
p=input('Entrer p= ')
q=1-p
X1=grand(1,10000,'geom',p)
X2=grand(1,10000,'geom',p)
X3=grand(1,10000,'geom',p)
f = .....
P=(1+q^2)/((1+q)^2)
disp(f,'fréquence de A: ')
disp(P,'probabilité de A: ')
```

Correction.

Exercice 1.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = \ln(1+x) - x$.
Par invocation des théorèmes généraux, h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \geq 0 \quad h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

$$\begin{cases} h'(x) < 0 & \text{si } x > 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$$

donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

donc

$$\forall x > 0 \quad h(x) < h(0) = 0$$

i.e.

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \ln(1+x) - x < 0}$$

et bien évidemment :

$$\boxed{\ln(1+0) - 0 = 0}$$

2. Pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$$

or

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 &\implies \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \implies \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln(x)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty &\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln(x)} = 0 \end{aligned} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$$

ce qui induit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1$$

i.e.

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)}$$

3. (a) Je vais essayer de me montrer astucieux afin d'éviter l'étude (fastidieuse) sur $\mathbb{R}_+$ des fonctions $t \mapsto 1-t-\frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t} - 1 + t - t^2 \dots$
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$t \neq -1 \quad \text{et} \quad 1+t > 0$$

donc, invoquons une identité remarquable bien connue, il vient

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-t^2}{1+t} = \frac{(1-t)(1+t)}{1+t} = 1-t &\implies \frac{1}{1+t} = 1-t + \frac{t^2}{1+t} \\ \frac{t^2}{1+t} \geq 0 \end{aligned} \right\} \implies \boxed{\frac{1}{1+t} \geq 1-t}$$

Invoquons désormais une somme géométrique finie :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+t^3}{1+t} = \frac{1-(-t)^3}{1-(-t)} = 1-t+(-t)^2 &\implies \frac{1}{1+t} = 1-t+t^2 - \frac{t^3}{1+t} \\ -\frac{t^3}{1+t} \leq 0 \end{aligned} \right\} \implies \boxed{\frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \geq 0 \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall t \geq 0 \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$$

donc, par compatibilité de l'intégrale avec la relation d'ordre, les fonctions en présence étant toutes continues sur $[0; x]$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^x (1-t) dt &\leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt \\ \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x &\leq [\ln(1+t)]_0^x \leq \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^x \end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

4. $x \mapsto 1+x$ est strictement positive et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\ln$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc, par composition, $x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

or

$$(\forall x > 0 \quad 1+x > 1) \implies (\forall x > 0 \quad \ln(1+x) > 0)$$

donc, $x \mapsto 1$ étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient, par quotient, le fait que $x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

or $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc, par différence, il vient finalement :

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

5.

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{+\infty}{\sim} \ln(x) \quad (\text{cf. 2.}) \\ \ln(x) &= o_{x \rightarrow +\infty}(x) \quad (\text{croissances comparées}) \end{aligned} \right\} \implies x - \ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} x$$

et

$$\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x) \implies x \ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln(x)$$

donc, par quotient,

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0 \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

Interprétation graphique : L'axe des abscisses du repère est asymptote horizontale à Γ au voisinage de $+\infty$.

6. (a)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

donc

$$x - \ln(1+x) = x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

(b)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

donc

$$x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

(c) Il vient alors :

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}$$

ce qui, simplifiant par x^2 , conduit à

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x)}{1 - \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)}$$

Posons $X = \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$ et

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \times \frac{1}{1-X} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x) \right) \times \left(1 + \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x) \right)$$

donc, après développement puis troncature au degré 1,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

et, finalement :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Il vient alors :

$$f(x) - f(0) = f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{x}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

donc

$$f(x) - f(0) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{12}$$

7.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x) \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$$

donc

$$f \text{ est continue en } 0.$$

8. Invoquant l'équivalent obtenu en 5.(c), il vient :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{12}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{12} \in \mathbb{R}$$

donc

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec : } f'(0) = -\frac{1}{12}.$$

9. Soit $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{1+x} + (\ln(1+x))^2}{x^2(\ln(1+x))^2} = \frac{-x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2}{x^2(\ln(1+x))^2}$$

Conclusion :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{-x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2}{x^2(1+x)(\ln(1+x))^2}$$

10. (a) Pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} -x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2 &= -x^2 + (1+x) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right)^2 \\ -x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2 &= -x^2 + (1+x) \left(x^2 + \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{2x^4}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \right) \\ -x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2 &= -x^2 + (1+x) \left(x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \right) \\ -x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2 &= -x^2 + x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + x^3 - x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ -x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2 &= -\frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ x^2(1+x)(\ln(1+x))^2 &= (x^2 + x^3) \left(x + o_{x \rightarrow 0}(x) \right)^2 \\ x^2(1+x)(\ln(1+x))^2 &= (x^2 + x^3) \left(x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \end{aligned}$$

donc

$$x^2(1+x)(\ln(1+x))^2 = x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

(b) Nous savons d'ors et déjà (cf. 3.) que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Reste à montrer que f est effectivement de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Montrons que f' est continue en 0 i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$.

Invoquant les développements limités obtenus précédemment, il vient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)}{x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)} \\ f'(x) &= \frac{-\frac{1}{12} + o_{x \rightarrow 0}(1)}{1 + o_{x \rightarrow 0}(1)} \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{12}$$

or

$$f'(0) = -\frac{1}{12}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$$

i.e. f' est continue en 0.

Étant dérivable, de dérivée continue en 0, il est légitime d'affirmer que

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0.$$

Invoquant le résultat de la question 4., il vient finalement :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

11. (a) g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ par invocation des théorèmes généraux.

Soit $x > 0$.

$$g'(x) = -2x + (\ln(1+x))^2 + (1+x) \times \frac{2}{1+x} \times \ln(1+x)$$

$$g'(x) = -2x + (\ln(1+x))^2 + 2 \ln(1+x)$$

$$g''(x) = -2 + \frac{2}{1+x} \ln(1+x) + \frac{2}{1+x}$$

$$g''(x) = \frac{2}{1+x} \ln(1+x) + \frac{-2x}{1+x}$$

$$\forall x > 0 \quad g''(x) = \frac{2}{1+x} \times (\ln(1+x) - x)$$

(b)

$$\forall x \geq 0 \quad g''(x) = \frac{2}{1+x} \times (\ln(1+x) - x)$$

or

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{2}{1+x} > 0$$

et (cf. 1.)

$$\forall x \geq 0 \quad \ln(1+x) - x \leq 0$$

donc

$$\forall x \geq 0 \quad g''(x) \leq 0$$

donc g' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

donc

$$\forall x \geq 0 \quad g'(x) \leq g'(0)$$

or

$$g'(0) = 0$$

donc

$$\forall x \geq 0 \quad g'(x) \leq 0$$

donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

donc

$$\forall x \geq 0 \quad g(x) \leq g(0)$$

or

$$g(0) = 0$$

donc

$$\forall x \geq 0 \quad g(x) \leq 0$$

(c)

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x)(\ln(1+x))^2}$$

or

$$\forall x > 0 \quad x^2(1+x)(\ln(1+x))^2 > 0$$

donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc, invoquant le résultat de la question précédente,

$$\forall x > 0 \quad f'(x) \leq 0$$

donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et, f étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, il est légitime d'affirmer que :
 f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{-1}{12}$	-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0

12. Notons
- $\mathcal{H}_n$
- la propriété définie sur
- $\mathbb{N}$
- par :
- $\ll u_n$
- existe et
- $u_n > 0 \gg$

Initialisation : Pour $n = 0$.

$$u_0 = 1 > 0$$

donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons que, sous cette condition (HR), elle est vraie au rang $n+1$.(HR) induit l'existence de u_n avec $u_n > 0$ or la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie au moins sur $\mathbb{R}_+$ donc $\ln(1+u_n)$ est calculable i.e. existedonc u_{n+1} existe.

$$u_n > 0$$

or

$$t > 0 \implies 1+t > 1 \implies \ln(1+t) > 0$$

donc

$$\ln(1+u_n) > 0$$

i.e.

$$u_{n+1} > 0$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.**Conclusion :**

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 \text{ vraie} \\ \mathcal{H}_n \text{ vraie} \implies \mathcal{H}_{n+1} \text{ vraie} \end{array} \right\} \implies \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \text{ vraie}}$$

13.

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n) - u_n \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0 \quad (\text{cf. 12.}) \\ \forall x > 0 \quad \ln(1+x) - x < 0 \quad (\text{cf. 1.}) \end{array} \right\} \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$$

donc

 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

14. La suite
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- est strictement décroissante et minorée (par 0)

donc, invoquant le théorème de la convergence monotone :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \geq 0 \\ x \mapsto \ln(1+x) \text{ continue sur } \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{array} \right\} \implies \ell = \ln(1+\ell)$$

or, invoquant 1.,

$$\ell = \ln(1+\ell) \iff \ell = 0$$

donc, il vient finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

15. Par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

donc, invoquant 14.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_0 = -u_0 = -1$$

Conclusion :

La série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (u_{k+1} - u_k)$ converge, de somme -1.

16. Invoquant le liminaire, il vient

$$\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

or

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - \frac{u_n^2}{2} \leq \ln(1+u_n) \leq u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{u_n^2}{2} \leq \ln(1+u_n) - u_n \leq -\frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3}$$

or

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{-u_n^2}{2} < 0$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 - \frac{2u_n}{3} \leq \frac{\ln(1+u_n) - u_n}{-\frac{u_n^2}{2}} \leq 1$$

or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2u_n}{3} = 1$$

donc, invoquant le théorème de l'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u_n) - u_n}{-\frac{u_n^2}{2}} = 1$$

i.e.

$$u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$$

17. Invoquant le critère d'équivalence des séries à termes négatifs, il vient

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0 \quad -\frac{u_n^2}{2} < 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} -\frac{u_n^2}{2} \text{ converge} \Rightarrow \boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2 \text{ converge}}$$

18. Par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \neq 0$$

donc

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \text{ diverge grossièrement.}}$$

Exercice 2.

1. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$L(\lambda P + Q) = \int_{-1}^1 (\lambda P + Q)(x) dx$$

$$L(\lambda P + Q) = \int_{-1}^1 (\lambda P(x) + Q(x)) dx$$

donc, invoquant la linéarité du calcul intégral,

$$L(\lambda P + Q) = \lambda \int_{-1}^1 P(x) dx + \int_{-1}^1 Q(x) dx$$

i.e.

$$L(\lambda P + Q) = \lambda L(P) + L(Q)$$

Conclusion :

$$\boxed{L \text{ est une application linéaire.}}$$

2. L est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$

or

$$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 \neq 1 = \dim(\mathbb{R})$$

donc

$$\boxed{L \text{ ne peut être bijective.}}$$

3. Pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$P \in \ker(L) \iff (\ast)$$

$$(\ast) \iff L(P) = 0$$

$$(\ast) \iff \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2) dx = 0$$

$$(\otimes) \iff \left[ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$(\otimes) \iff c = -3a$$

Ainsi

$$\ker(L) = \{ P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid c = -3a \}$$

$$\ker(L) = \{ a + bX - 3aX^2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\ker(L) = \text{vect}(X, 1 - 3X^2)$$

La famille $(X, 1 - 3X^2)$ est échelonnée en degrés donc libre
et elle est génératrice de $\ker(L)$

donc

$$\text{La famille } (X, 1 - 3X^2) \text{ est une base de } \ker(L) \text{ et : } \dim(\ker(L)) = 2$$

4. L est un morphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie
donc, invoquant le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\text{Im}(L)) + \dim(\ker(L))$$

$$3 = 2 + \dim(\text{Im}(L))$$

$$\dim(\text{Im}(L)) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im}(L) \subset \mathbb{R} \\ \dim(\mathbb{R}) = 1 \\ \dim(\text{Im}(L)) = 1 \end{array} \right\} \implies \text{Im}(L) = \mathbb{R}$$

5.

$$\left. \begin{array}{l} L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}) \\ \text{Im}(L) = \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies L \text{ surjective}$$

6. • Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$\mathbb{R}_2[X]$ étant un espace vectoriel (donc stable par combinaison linéaire), il vient :

$$\left. \begin{array}{l} P \in \mathbb{R}_2[X] \\ \alpha L(P)X \in \mathbb{R}_1[X] \end{array} \right\} \implies \alpha L(P)X \in \mathbb{R}_2[X] \implies f_\alpha(P) \in \mathbb{R}_2[X]$$

i.e.

$$\mathbb{R}_2[X] \text{ est stable par } f_\alpha.$$

- Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f_\alpha(\lambda P + Q) = \lambda P + Q + \alpha L(\lambda P + Q)X$$

or L est linéaire

donc

$$f_\alpha(\lambda P + Q) = \lambda P + Q + \alpha(\lambda L(P) + L(Q))X$$

$$f_\alpha(\lambda P + Q) = \lambda P + Q + \alpha\lambda L(P)X + \alpha L(Q)X$$

$$f_\alpha(\lambda P + Q) = \lambda(P + \alpha L(P)X) + Q + \alpha L(Q)X$$

donc

$$f_\alpha(\lambda P + Q) = \lambda f_\alpha(P) + f_\alpha(Q)$$

donc f_α est linéaire.

Conclusion :

$$f_\alpha \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].$$

7. Nous avons montré en 3. que

$$\forall P = a + bX + cX^2 \in E \quad L(P) = 2a = \frac{2c}{3}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} L(X) = 0 &\implies f_\alpha(X) = X \\ L(X^2) = \frac{2}{3} &\implies f_\alpha(X^2) = X^2 + \frac{2\alpha}{3}X \end{aligned}$$

donc

$$8. \quad \left. \begin{aligned} L(1) = 2 &\implies f_\alpha(1) = 1 + 2\alpha \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f_\alpha(X) &= 0.1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ f_\alpha(X^2) &= 0.1 + \frac{2\alpha}{3} \cdot X + 1 \cdot X^2 \end{aligned} \right\} \implies \boxed{M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & \frac{2\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \text{Sp}(f_\alpha) \iff M_\alpha - \lambda I \text{ non inversible}$$

$$M_\alpha - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1-\lambda & \frac{2\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Appliquons la méthode de Gauss.

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 0 & 0 & L_1 \\ 2\alpha & 1-\lambda & \frac{2\alpha}{3} & L_2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & L_3 \end{array} \right| \\ &\sim \left| \begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 1-\lambda & \frac{2\alpha}{3} & L_2 \rightarrow L'_1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 & L_1 \rightarrow L'_2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & L_3 \end{array} \right| \end{aligned}$$

or

$$\alpha \neq 0 \implies (1-\lambda)L'_1 - 2\alpha L'_2 \rightarrow L''_2 \text{ autorisée}$$

donc

$$M_\alpha - \lambda I \sim \left| \begin{array}{ccc|c} 2\alpha & 1-\lambda & \frac{2\alpha}{3} & L'_1 \\ 0 & (1-\lambda)^2 & \frac{2\alpha}{3}(1-\lambda) & (1-\lambda)L'_1 - 2\alpha L'_2 \rightarrow L''_2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & L_3 \end{array} \right|$$

Cette dernière réduite de Gauss de $M_\alpha - \lambda I$ est triangulaire de termes diagonaux 2α , $(1-\lambda)^2$ et $1-\lambda$ donc

$$\lambda \in \text{Sp}(f_\alpha) \iff 1-\lambda = 0 \iff \lambda = 1$$

ainsi,

$$\boxed{f_\alpha \text{ a pour unique valeur propre } 1.}$$

10. 0 n'est pas valeur propre de f_α
donc f_α est bijective
donc

$$\boxed{\text{rg}(f_\alpha) = 3}$$

11. Pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) :$

$$U \in E_1(M_\alpha) \iff (\circledast)$$

$$(\circledast) \iff (M_\alpha - I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Utilisant la dernière réduite de Gauss obtenue en 9., il vient alors

$$(\circledast) \iff 2\alpha x + \frac{2\alpha}{3}z = 0$$

or

$$\alpha \neq 0$$

donc

$$(\circledast) \iff z = -3x$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_1(M_\alpha) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -3x \right\} \\ E_1(M_\alpha) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, x) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ E_1(M_\alpha) &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$E_1(f_\alpha) = \text{vect}(1 - 3X^2, X)$$

Étant échelonnée en degrés, la famille $(1 - 3X^2, X)$ est libre

or elle est génératrice de $E_1(f_\alpha)$

donc

$$\text{La famille } (1 - 3X^2, X) \text{ est une base de } E_1(f_\alpha) \text{ et : } \dim(E_1(f_\alpha)) = 2.$$

12.

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f_\alpha)} \dim(E_\lambda(f_\alpha)) = \dim(E_1(f_\alpha)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

donc, invoquant le théorème fondamental de réduction :

$$f_\alpha \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

13. Soient a, b et c des réels tels que :

$$aR_1 + bR_2 + cR_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff (\heartsuit)$$

Montrons alors que, nécessairement : $a = b = c = 0$.

$$(\heartsuit) \iff a(1 - 3X^2) + bX + c \left(1 + \left(\frac{1}{2\alpha} - 3 \right) X^2 \right) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

$$(\heartsuit) \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ -3a + c \left(\frac{1}{2\alpha} - 3 \right) = 0 \end{cases}$$

$$(\heartsuit) \iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ -3a + c \left(\frac{1}{2\alpha} - 3 \right) = 0 \end{cases}$$

$$(\heartsuit) \iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ 3c + c \left(\frac{1}{2\alpha} - 3 \right) = 0 \end{cases}$$

$$(\heartsuit) \iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ \frac{1}{2\alpha}c = 0 \end{cases}$$

or

$$\frac{1}{2\alpha} \neq 0$$

donc

$$(\heartsuit) \iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$(\heartsuit) \iff a = b = c = 0$$

donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre.

Or

$$\text{card}(\mathcal{B})' = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre maximale et :

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

14. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & \frac{1}{2\alpha} - 3 \end{pmatrix}$$

15.

$$f_\alpha(R_1) = R_1$$

$$f_\alpha(R_2) = R_2$$

$$M_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2\alpha} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2\alpha} - 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2\alpha} - 3 \end{pmatrix}$$

donc

$$f_\alpha(R_3) = \frac{1}{3}R_2 + R_3$$

donc

$$M'_\alpha = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par application du cours, il vient :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\alpha) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_\alpha)$$

i.e.

$$\boxed{M_\alpha Q = Q M'_\alpha}$$

16. Nous savons que f_α est bijective donc que M_α est inversible.

Déterminons l'inverse de cette matrice par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & \frac{2\alpha}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2\alpha}{3} & 2\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 \\ 2\alpha L_1 - L_2 \rightarrow L'_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2\alpha & 1 & -\frac{2\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 \\ -\frac{2\alpha}{3}L_3 - L'_2 \rightarrow L''_2 \\ L_3 \end{array}$$

On en déduit que :

$$M_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\alpha & 1 & -\frac{2\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$M_\alpha^{-1} = M_{-\alpha}$$

or

$$M_\alpha^{-1} = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\alpha))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\alpha^{-1})$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\alpha^{-1}) = M_{-\alpha} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{-\alpha})$$

ce qui induit finalement :

$$f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$$

Exercice 3.

Liminaire.

Il faut effectuer une disjonction de cas.

⊗ **Cas 1** : $p = \frac{1}{2}$.

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{2}$$

La suite est constante.

⊗ **Cas 2** : $p \neq \frac{1}{2}$.

Alors

$$2p - 1 \neq 0$$

et, dans ce cas :

$$\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est arithmético-géométrique.}$$

$$(2p - 1)x + 1 - p = x \iff x = \frac{p - 1}{2p - 2} = \frac{p - 1}{2(p - 1)} = \frac{1}{2}$$

Le point fixe ω de la suite est $\frac{1}{2}$.

Il vient alors, effectuant $(L_2) - (L_1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left. \begin{array}{l} (2p - 1)\omega + 1 - p = \omega \\ (2p - 1)u_n + 1 - p = u_{n+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \end{array} \implies \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2p - 1)(u_n - \omega) = u_{n+1} - \omega$$

donc la suite $(u_n - \omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = 2p - 1$ et de premier terme

$$u_1 - \omega = a - \omega$$

donc, pour conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n - \omega = (u_1 - \omega) \times (2p - 1)^{n-1}$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{2} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \times (2p - 1)^{n-1}$$

Partie A.

1. Fonction demandée :

```
function Y=simuleloi(n,p)
    Y=1
    for i=1:n
        if grand(1,1,"bin",1,p)==1 then
            a=1
        else
            a=-1
        end
        Y=Y*a
    end
endfunction
```

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Y_n(\Omega) = \{-1; 1\}$$

3. Loi de Y_2 .

$$Y_2(\Omega) = \{-1; 1\}$$

Pour déterminer la loi de Y_2 , il suffit donc de calculer $P(Y_2 = 1)$.

$$\{Y_2 = 1\} = (\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) \cup (\{X_1 = -1\} \cap \{X_2 = -1\})$$

or les événements $\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}$ et $\{X_1 = -1\} \cap \{X_2 = -1\}$ sont incompatibles donc

$$P(Y_2 = 1) = P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) + P(\{X_1 = -1\} \cap \{X_2 = -1\})$$

or les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes donc

$$P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = -1)$$

or

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(X_i = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_i = -1) = 1 - p$$

donc, finalement :

$$P(Y_2 = 1) = p^2 + (1 - p)^2 = 2p^2 - 2p + 1.$$

Conclusion : La loi de Y_2 est définie par :

$$Y_2(\Omega) = \{-1; 1\} \quad P(Y_2 = 1) = 2p^2 - 2p + 1 \quad P(Y_2 = -1) = 2p - 2p^2.$$

4. Loi de Y_3 .

$$Y_3(\Omega) = \{-1; 1\}.$$

Pour déterminer la loi de Y_3 , il suffit donc de calculer $P(Y_3 = 1)$.

$$\{Y_3 = 1\} = (\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 1\}) \bigcup_{i=1}^3 \left[\{X_i = 1\} \bigcap_{j=1, j \neq i}^3 \{X_j = -1\} \right]$$

or les événements $\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 1\}$ et $\left(\left[\{X_i = 1\} \bigcap_{j=1, j \neq i}^3 \{X_j = -1\} \right] \right)_{1 \leq i \leq 3}$ sont

incompatibles donc

$$P(Y_3 = 1) = P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 1\}) + \sum_{i=1}^3 P\left(\{X_i = 1\} \bigcap_{j=1, j \neq i}^3 \{X_j = -1\}\right)$$

or les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes
donc

$$P(Y_3 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) + \sum_{i=1}^3 \left(P(X_i = 1) \prod_{j=1, j \neq i}^3 P(X_j = -1) \right)$$

or

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(X_i = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_i = -1) = 1 - p$$

donc

$$P(Y_3 = 1) = p^3 + 3p(1-p)^2$$

$$P(Y_3 = 1) = 4p^3 - 6p^2 + 3p.$$

Conclusion : La loi de Y_3 est définie par :

$$Y_3(\Omega) = \{-1; 1\} \quad P(Y_3 = 1) = 4p^3 - 6p^2 + 3p \quad P(Y_3 = -1) = 1 - P(Y_3 = 1) = 1 - 4p^3 + 6p^2 - 3p.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

La famille $(\{Y_n = 1\}, \{Y_n = -1\})$ est un système complet d'événements
donc le théorème des probabilités totales s'applique et

$$u_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P(\{Y_n = 1\} \cap \{Y_{n+1} = 1\}) + P(\{Y_n = -1\} \cap \{Y_{n+1} = 1\})$$

donc, par application de la formule des probabilités conditionnelles,

$$u_{n+1} = P(Y_n = 1)P_{\{Y_n=1\}}(Y_{n+1} = 1) + P(Y_n = -1)P_{\{Y_n=-1\}}(Y_{n+1} = 1)$$

or

$$P(Y_n = 1) = u_n \quad P(Y_n = -1) = 1 - u_n$$

et donc

$$u_{n+1} = u_n P_{\{Y_n=1\}}(Y_{n+1} = 1) + (1 - u_n) P_{\{Y_n=-1\}}(Y_{n+1} = 1)$$

or

$$Y_{n+1} = Y_n X_{n+1} \implies P_{\{Y_n=1\}}(Y_{n+1} = 1) = P_{\{Y_n=1\}}(X_{n+1} Y_n = 1) = P_{\{X_1 \dots X_n = 1\}}(X_{n+1} = 1)$$

et

$$Y_{n+1} = Y_n X_{n+1} \implies P_{\{Y_n=-1\}}(Y_{n+1} = 1) = P_{\{Y_n=-1\}}(X_{n+1} Y_n = 1) = P_{\{X_1 \dots X_n = -1\}}(X_{n+1} = -1)$$

donc, les variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$ étant mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions² légitime l'affirmation selon laquelle les variables aléatoires $\prod_{i=1}^n X_i$ et X_{n+1} sont indépendantes et il vient

$$P_{\{Y_n=1\}}(Y_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1) = p \quad \text{et} \quad P_{\{Y_n=-1\}}(Y_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = -1) = 1 - p$$

ce qui induit

$$u_{n+1} = u_n p + (1 - u_n)(1 - p)$$

et finalement :

$$u_{n+1} = (2p - 1)u_n + 1 - p.$$

Conclusion :

2. **Lemme des coalitions :** Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** sur un même espace probabilisé.
Alors toute variable aléatoire fonction de p variables (X_i) est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $n-p$ autres variables.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = (2p-1)u_n + 1 - p.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie (★) donc, invoquant le résultat du liminaire en prenant

$$a = P(Y=1) = P(X=1) = p$$

il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2p-1)^n.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Par définition, les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \{-1; 1\}^2 \quad P(\{Y_n = i\} \cap \{Y_{n+1} = j\}) = P(Y_n = i) P(Y_{n+1} = j)$$

or on sait que si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont respectivement également.

Donc, puisque

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \overline{\{Y_m = 1\}} = \{Y_m = -1\}$$

il est légitime d'affirmer que les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes si et seulement si

$$P(\{Y_n = 1\} \cap \{Y_{n+1} = 1\}) = P(Y_n = 1) P(Y_{n+1} = 1) = u_n u_{n+1}.$$

Or

$$P(\{Y_n = 1\} \cap \{Y_{n+1} = 1\}) = P(Y_n = 1) P_{\{Y_n=1\}}(Y_{n+1} = 1) = u_n p$$

donc Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes si et seulement si

$$u_n p = u_n u_{n+1} \tag{1}$$

$$(1) \iff u_n (u_{n+1} - p) = 0$$

or

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{(2p-1)^n}{2} \neq 0$$

donc

$$(1) \iff u_{n+1} = p$$

or

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{(2p-1)^{n+1}}{2}$$

donc

$$(1) \iff \frac{1}{2} + \frac{(2p-1)^{n+1}}{2} = p$$

$$(1) \iff 1 + (2p-1)^{n+1} = 2p$$

$$(1) \iff 2p-1 - (2p-1)^{n+1} = 0$$

$$(1) \iff (2p-1)(1 - (2p-1)^n) = 0$$

$$(1) \iff 2p-1 = 0 \text{ ou } 1 - (2p-1)^n = 0$$

or

$$p \in]0; 1[\implies 2p-1 \neq 1 \implies 1 - (2p-1)^n \neq 0$$

et

$$n > 0$$

donc

$$(1) \iff 2p-1 = 0 \iff p = \frac{1}{2}.$$

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Remarquons tout d'abord que S_n prend un nombre fini de valeurs entières donc que S_n admet nécessairement une espérance.

Par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

or

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad E(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) + (-1) \times P(X_i = -1) = p - (1 - p) = 2p - 1$$

donc

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n (2p - 1)$$

$$E(S_n) = n(2p - 1)$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E(S_n) = n(2p - 1).$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Remarquons tout d'abord que S_n prend un nombre fini de valeurs entières donc que S_n admet nécessairement un moment d'ordre 2.

$$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$$

or les variables X_i sont mutuellement indépendantes

donc

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$X_k(\Omega) = \{-1; 1\} \Rightarrow X_k^2 = 1 \Rightarrow E(X_k^2) = 1 \xrightarrow{\text{Koenig-Huygens}} V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1 - (2p - 1)^2$$

donc

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n (1 - (2p - 1)^2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V(S_n) = n - n(2p - 1)^2$$

9. Soit $i \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad B_i = \frac{X_i + 1}{2}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad X_i(\Omega) = \{-1; 1\} \implies \forall i \in \mathbb{N}^* \quad B_i(\Omega) = \{0; 1\}$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(B_i = 1) = P(X_i = 1) = p$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad B_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \quad E(B_i) = p \quad V(B_i) = p(1 - p)$$

10. $T_n = \sum_{i=1}^n B_i$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p
donc T_n suit la loi binomiale de paramètres n et p , ce qui induit

$$T_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(T_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Or

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (2B_i - 1)$$

donc

$$S_n = 2T_n - n$$

ce qui induit finalement :

$$S_n(\Omega) = \{2i - n \mid i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$P(S_n = 2i - n) = P(2T_n - n = 2i - n) = P(T_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n(\Omega) = \{2i - n \mid i \in \llbracket 0; n \rrbracket\} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(S_n = 2i - n) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

11. **Fonction demandée :**

```
function S=simule(n,p)
    S=sum(2*grand(1,n,"bin",1,p)-1)
endfunction
```

Partie B.

12.

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 = k) = pq^{k-1}$$

$$E(X_1) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X_1) = \frac{q}{p^2}$$

13.

$$P(\Delta = 0) = P(X_1 = X_2)$$

or $(\{X_1 = k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements
donc, par application du théorème des probabilités totales³

$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_1 = X_2\})$$

$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\})$$

donc, par indépendance de X_1 et de X_2 ,

$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = k)$$

$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$$

$$P(\Delta = 0) = \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k$$

3. Le théorème des probabilités totales nous fournit la convergence de toutes les séries évoquées...

donc, reconnaissant la somme d'une série géométrique convergente,

$$P(\Delta = 0) = \frac{p^2}{q^2} \times \frac{q^2}{1 - q^2}$$

$$P(\Delta = 0) = \frac{p^2}{p(1 + q)}$$

$$P(\Delta = 0) = \frac{p}{1 + q} = \frac{p}{2 - p}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$(\{X_2 = k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements

donc, par application du théorème des probabilités totales⁴

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 - X_2 = n\})$$

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 = n + k\})$$

donc, par indépendance de X_1 et de X_2 ,

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k)$$

donc, finalement, ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k)$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Invoquant le résultat de la question précédente, il vient

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k)$$

or X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p

donc

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} pq^{n+k-1}$$

$$P(X_1 - X_2 = n) = p^2 q^{n-2} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k$$

$$P(X_1 - X_2 = n) = p^2 q^{n-2} \times \frac{q^2}{1 - q^2}$$

donc

$$P(X_1 - X_2 = n) = \frac{p^2 q^n}{1 - q^2} = \frac{pq^n}{1 + q}$$

$$\{\Delta = n\} = \{|X_1 - X_2| = n\} = \{X_1 - X_2 = n\} \cup \{X_2 - X_1 = n\}$$

donc, s'agissant d'une union d'événements incompatibles,

$$P(\Delta = n) = P(X_1 - X_2 = n) + P(X_2 - X_1 = n)$$

or X_1 et X_2 jouent des rôles symétriques

donc

$$P(\Delta = n) = 2P(X_1 - X_2 = n)$$

et finalement, ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

4. Le théorème des probabilités totales nous fournit la convergence de toutes les séries évoquées...

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(\Delta = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$$

16. Δ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nP(\Delta = n)$ converge absolument et, le cas échéant :

$$E(\Delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(\Delta = n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad nP(\Delta = n) \geq 0$$

donc la convergence absolue de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nP(\Delta = n)$ est équivalente à sa convergence simple.

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=0}^N nP(\Delta = n) = \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=1}^N nq^{n-1}$$

or (série géométrique dérivée première)

$$|q| < 1 \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N nP(\Delta = n) = \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p(1+q)}$$

donc donc la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nP(\Delta = n)$ converge de limite $\frac{2q}{p(1+q)}$

donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nP(\Delta = n)$ converge et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(\Delta = n) = \frac{2q}{p(1+q)}$$

Conclusion :

$$\Delta \text{ admet une espérance et : } E(\Delta) = \frac{2q}{p(1+q)}.$$

- 17.

$$E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2)$$

or X_1 et X_2 admettent des moments de tous ordres
donc, par linéarité de l'espérance,

$$E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1X_2)$$

or X_1 et X_2 sont indépendantes
donc

$$E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1)E(X_2)$$

or

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi} \implies [E(X_1) = E(X_2) \quad \text{et} \quad E(X_1^2) = E(X_2^2)]$$

donc

$$E((X_1 - X_2)^2) = 2E(X_1^2) - 2E(X_1)^2$$

et le théorème de Koenig-Huygens nous permet de conclure :

$$\mathbb{E} \left((X_1 - X_2)^2 \right) = 2V(X_1)$$

$$\Delta^2 = (|X_1 - X_2|)^2 = (X_1 - X_2)^2$$

or, d'après la question précédente, X_1 suivant la loi géométrique de paramètre p ,

$$\mathbb{E} \left((X_1 - X_2)^2 \right) = 2V(X_1) = \frac{2q}{p^2}$$

donc Δ admet un moment d'ordre 2 avec

$$\mathbb{E}(\Delta^2) = \mathbb{E} \left((X_1 - X_2)^2 \right) = \frac{2q}{p^2}$$

Admettant un moment d'ordre 2,

$$\Delta \text{ admet une variance}$$

et, par application de la formule de Koenig-Huygens,

$$V(\Delta) = \mathbb{E}(\Delta^2) - \mathbb{E}(\Delta)^2$$

$$V(\Delta) = \frac{2q}{p^2} - \left(\frac{2q}{p(1+q)} \right)^2$$

$$V(\Delta) = \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{p^2(1+q)^2}$$

18.

$$A = \{ \min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2) \}$$

$$A = \{ X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2) \}$$

$$A = \{ X_3 > |X_1 - X_2| \}$$

$$A = \{ X_3 > \Delta \}$$

19. Invoquant la question précédente,

$$P(A) = P(X_3 > \Delta)$$

or $(\{\Delta = k\})_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements
donc, par application du théorème des probabilités totales,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{\Delta = k\} \cap \{X_3 > \Delta\})$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{\Delta = k\} \cap \{X_3 > k\})$$

or, les variables aléatoires X_1, X_2 étant mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions induit l'indépendance des variables $\Delta = |X_1 - X_2|$ et X_3
ce qui entraîne

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k) P(X_3 > k)$$

or

$$P(\Delta = 0) = \frac{p}{1+q} \quad \text{et} \quad P(X_3 > 0) = 1$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(\Delta = k) = \frac{2pq^k}{1+q} \quad \text{et} \quad P(X_3 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = p \sum_{i=k}^{+\infty} q^i = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$$

donc

$$P(A) = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k$$

$$P(A) = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \times \frac{q^2}{1-q^2}$$

$$P(A) = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \times \frac{q^2}{p(1+q)}$$

$$P(A) = \frac{p}{1+q} + \frac{2q^2}{(1+q)^2}$$

$$P(A) = \frac{(1-q)(1+q) + 2q^2}{(1+q)^2}$$

$$P(A) = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}$$

20. (a) **Première méthode de calcul de f.**

```
p=input('Entrer p= ')
q=1-p
X1=grand(1,10000,'geom',p)
X2=grand(1,10000,'geom',p)
X3=grand(1,10000,'geom',p)
N=0
for k=1:10000
    if min(X1(k),X2(k))+X3(k)>max(X1(k),X2(k)) then
        N=N+1
    end
end
f=N/10000
P=(1+q^2)/((1+q)^2)
disp(f,'fréquence de A: ')
disp(P,'probabilité de A: ')
```

(b) **Deuxième méthode de calcul de f.**

```
p=input('Entrer p= ')
q=1-p
X1=grand(1,10000,'geom',p)
X2=grand(1,10000,'geom',p)
X3=grand(1,10000,'geom',p)
N=0
f=sum(min(X1,X2)+X3>max(X1,X2))/10000
P=(1+q^2)/((1+q)^2)
disp(f,'fréquence de A: ')
disp(P,'probabilité de A: ')
```