

Exercice 7

- 1) Donner un équivalent au voisinage de 0 de $\sin(3x) - \sin(2x)$.

En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{\sin(x)}$.

- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(3x) - 3 \sin(2x)}{\sin^3(x)}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
- 2) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et préciser $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
- 3) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12

Pour tout x réel positif, on pose :

$$F(x) = \frac{x}{(1+x)} + x - 2 \ln(1+x).$$

On cherche à obtenir le meilleur encadrement de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq F(x) \leq kx^3 \quad (*)$$

où k est une constante.

- 1) Calculer F' et montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq F(x)$.
- 2) Justifier que pour tout $k > 0$, il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel on a $F(x) \leq kx^3$.
- 3) Déterminer le développement limité de F à l'ordre 3 en 0.
- 4) En déduire que si k est tel que $(*)$ soit vraie, alors $k \geq 1/3$.
- 5) Est-ce que $k = 1/3$ convient?