

### Exercice 12.1

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^5 \sin \frac{1}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ .

Étudier l'existence d'un développement limité de  $f$  en 0 aux ordres 4, 5 et 6.

### Exercice 12.2

Les vingt et une questions suivantes vous permettent d'apprendre à faire des développements limités et à les utiliser. Elles sont rangées par ordre croissant de difficulté.

- a)  $\text{DL}_5(\cos x \operatorname{ch} x, 0)$
- b)  $\text{DL}_4(\ln(1+x) \sin x, 0)$
- c)  $\text{DL}_3\left(\frac{1+x^2}{3+x}, 0\right)$
- d)  $\text{DL}_9(\sin^6 x, 0)$
- e)  $\text{DL}_2((1 + \sin x)^{1/x}, 0)$
- f) un équivalent simple quand  $x$  tend vers 0 de  $1 - \cos(2x)$ .
- g) un équivalent simple quand  $x$  tend vers 0 de  $x^x - 1$ .
- h) un développement asymptotique à trois termes de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- i)  $\text{DL}_2\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, 0\right)$
- j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1}\right)$
- k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1)^{1/(1+2 \ln x)}$
- l)  $\text{DL}_3(\ln(1+x + \sqrt{1+x}), 0)$
- m)  $\text{DL}_3\left(\frac{1}{1+x^2}, -2\right)$
- n) un équivalent simple quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $e^{1/x} - e^{1/(x+1)}$
- o)  $\text{DL}_2(\exp(\cos x), 2\pi/3)$
- p) un équivalent simple lorsque  $x$  tend vers 0 de  $\arcsin^p x - x^q$  où  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ .
- q)  $\text{DL}_{32}(1+x, 0)$
- r)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$
- s)  $\text{DL}_2(\sqrt{\ln x}, 3)$
- t) un équivalent simple en  $+\infty$  de  $\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ .

### Exercice 12.3

Déterminer le développement limité à l'ordre 6 de  $\tan x$  en 0 en utilisant que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ .

### Exercice 12.4

Utiliser un calcul de développement limité pour déterminer la dérivée 5<sup>ème</sup> de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{x^2}$ .

### Exercice 12.5

Soit  $f : [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ .

Montrer que  $f$  se prolonge sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  en une fonction de classe  $C^1$ .

### Exercice 12.6

- a) Montrer que  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \ln(1+x)$  est bijective.
- b) Montrer que  $f^{-1}$  admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le déterminer.

## 13. Études de fonctions

### Exercice 13.1

Étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \cos x e^{\tan x}$ , en portant une attention particulière sur les demi-tangentes.

### Exercice 13.2

Étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x \operatorname{Arctan} x$ , en portant une attention particulière sur asymptotes en l'infini et la position par rapport aux asymptotes.

### Exercice 13.3

Étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2(x + 11/3)}$ , en portant une attention particulière sur l'étude au voisinage de 1, -1 et  $-11/3$ , les asymptotes et les positions par rapport aux asymptotes.

### Exercice 13.4

Étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ , en portant une attention particulière sur les points d'inflexions.

### Solution 12.1

Puisque  $x \mapsto \sin(1/x)$  est bornée,  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^5)$  et  $f$  admet un  $DL_4(0)$ .

Si  $f$  admettait un  $DL_5(0)$ , elle admettrait un  $DL_4(0)$  par troncature, d'où, d'après ce qui précède, le  $DL_5(0)$  serait de la forme  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ax^5 + o(x^5)$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ . Or  $x^5 \sin(1/x) = O(x^5)$ , donc  $ax^5 + o(x^5) = x^5 \sin(1/x)$ , d'où  $\sin(1/x) - a = o(1)$ , i.e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) = a$  ce qui est absurde car  $\sin(1/x)$  n'admet pas de limite en zéro.

La fonction  $f$  n'admettant pas de  $DL_5(0)$ , elle admet encore moins de  $DL_6(0)$ .

### Solution 12.2

- a)  $1 - x^4/4 + o(x^5)$
- b)  $x^2 - x^3/3 + x^4/6 + o(x^4)$
- c)  $1/3 - x/9 + 10x^2/27 + o(x^3)$
- d)  $x^6 - x^8 + o(x^9)$
- e)  $e - ex/2 + o(x)$  (développez  $\sin$  à l'ordre 3)
- f)  $1 - \cos(2x) = 2x^2 + o(x^3)$
- g)  $x^x - 1 = x \ln x + o(x \ln x)$
- h)  $e - e/2n + 11e/24n^2 + o(1/n^2)$
- i) Ne commencez pas par réduire au même dénominateur.  
 $1/2 - x/12 + x^2/24 + o(x^2)$
- j)  $\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1} = \frac{1}{2x} + o(1/x)$
- k) 1
- l)  $\ln 2 + 3x/4 - 11x^2/32 + o(x^2)$ .
- m)  $\frac{1}{5} + \frac{4}{25}(x+2) + \frac{11}{25}(x+2)^2 + \frac{24}{625}(x+2)^3 + o((x+2)^3)$

n)  $1/x^2$ .

o)  $\frac{1}{\sqrt{e}} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{5}{8} \left( x - \frac{2\pi}{3} \right)^2 \right) + o \left( \left( x - \frac{2\pi}{3} \right)^3 \right)$ .

p)  $\triangleright$  Si  $p > q$ ,  $\arcsin^p x = x^p + o(x^p)$  et  $x^q = o(x^p)$   
Nous en déduisons que  $\arcsin^p x - x^q \sim \arcsin^p x$

$\triangleright$  Si  $p < q$ ,  $\arcsin^p x = o(x^q)$ , d'où  $\arcsin^p x - x^q \sim -x^q$

$\triangleright$  Si  $p = q$ ,  $\arcsin^p x - x^p = x^p (1 - x^2/6 + o(x^3)) - x^p \sim -px^{p+2}/6$

q) ah! ah! ah!

r) -2, en posant  $x = 1 + t$  et en allant jusqu'à l'ordre 2.

s)  $\sqrt{\ln 3} + \frac{1}{6\sqrt{\ln 3}}(x-3) - \frac{1}{36\sqrt{\ln 3}} \left( 1 + \frac{1}{2\ln 3} \right) (x-3)^2 + o((x-3)^2) \dots$

t)  $\sqrt{2}/4x$ , en allant à l'ordre 2 pour les racines.

### Solution 12.3

- $\triangleright$  La fonction tangente étant impaire et de classe  $C^\infty$ , elle admet un  $DL_6(0)$  de la forme  $\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$ . Écrivez alors que  $\tan' x = 1 + \tan^2 x$  à l'aide des opérations sur les DL. Vous devez trouver  $a = 1$ ,  $b = 1/3$  et  $c = 2/15$ .
- $\triangleright$  Autre méthode : vous pouvez partir du fait que  $\tan x = x + o(x^2)$ . Alors  $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o(x^3)$  d'où  $\tan x = x + x^3/3 + o(x^4)$  car  $\tan 0 = 0$ . Il ne vous reste plus qu'à réitérer l'opération.

### Solution 12.4

$\triangle_J$  Utilisez le développement de Taylor-Young à l'ordre 5 et l'unicité du  $DL_5(x)$ . Contentez-vous de calculer le terme de degré 5 du DL.

$\textcircled{s} (120x + 160x^3 + 32x^5)e^{x^2}$ .

### Solution 12.5

$\triangle_J$  Vérifiez une à une les hypothèses du théorème de la limite de la dérivée.

$\textcircled{s}$  Remarquons que  $f(x) = x/6 + o(x)$ , alors

- $\triangleright$   $f$  est continue sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  en posant  $f(0) = 0$
- $\triangleright$   $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$
- $\triangleright$   $f'$  a une limite finie  $1/6$  en 0

La fonction  $f$  se prolonge donc sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  en une fonction de classe  $C^1$ .

### Solution 12.6

- a) La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $] -1, +\infty[$ .

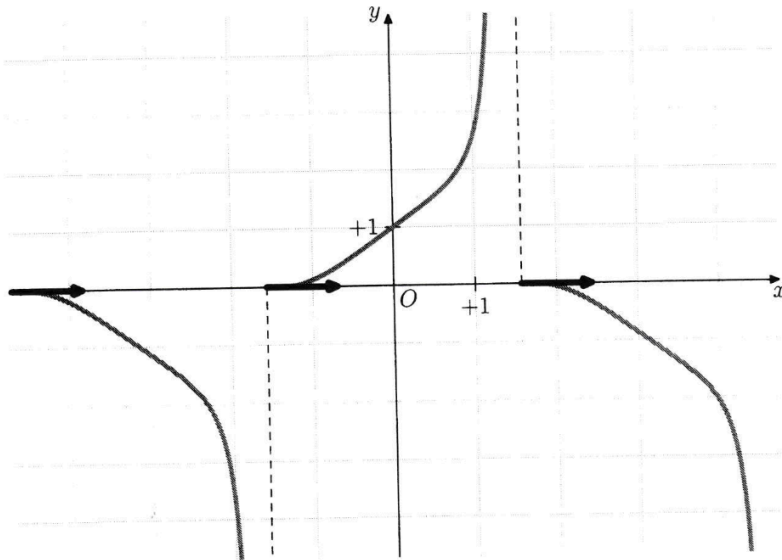
- b) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $] -1, +\infty[$  en utilisant le développement de Taylor-Young et donc sa réciproque aussi car  $f'$  ne s'annule pas .  
 Posez ensuite  $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$  et n'oubliez pas d'utiliser le fait que  $f^{-1}(f(x)) = x = a + bf(x) + cf^2(x) + cf^3(x) + o(x)$  en prenant un développement limité de  $\ln(1+x)$ .  
 Vous devez alors obtenir  $f^{-1}(x) = x/2 + x^2/16 - x^3/192 + o(x^3)$

## 13. Études de fonctions

### Solution 13.1

La fonction est  $2\pi$ -périodique et  $f(x+\pi) = -f(x)$ . Nous pouvons donc restreindre l'étude à l'intervalle  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

- ▷  $f(x) = f(h - \pi/2) \underset{0+}{\sim} he^{-1/h} \xrightarrow{h \rightarrow 0+} 0$
- ▷  $f(x) = f(\pi/2 - h) \underset{0+}{\sim} he^{1/h} \xrightarrow{h \rightarrow 0+} +\infty$
- ▷  $f'(x) = \frac{2 - \sin 2x}{2 \cos x} e^{\tan x} > 0$  sur  $]-\pi/2, \pi/2[$
- ▷  $\lim_{x \rightarrow -\pi/2+} f'(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \pi/2-} f'(x) = +\infty$



### Solution 13.2

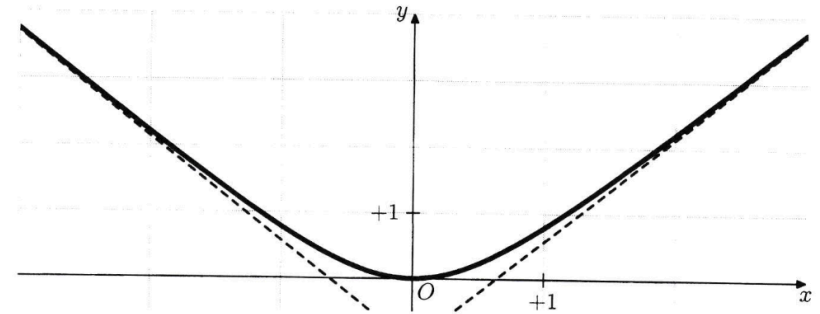
$\triangle_j$  Pour le développement asymptotique, utilisez  $\arctan x = \pi/2 - \arctan(1/x)$  pour  $x > 0$ .

La fonction est paire : étudions-la sur  $[0, +\infty[$ .

- ▷  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- ▷  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ , comme produit de fonctions positives et croissantes.
- ▷ Enfin, le développement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$  est

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$(\Gamma_f)$  admet donc une asymptote d'équation  $y = \pi x/2 - 1$  au voisinage de  $+\infty$  en restant au-dessus de cette asymptote.



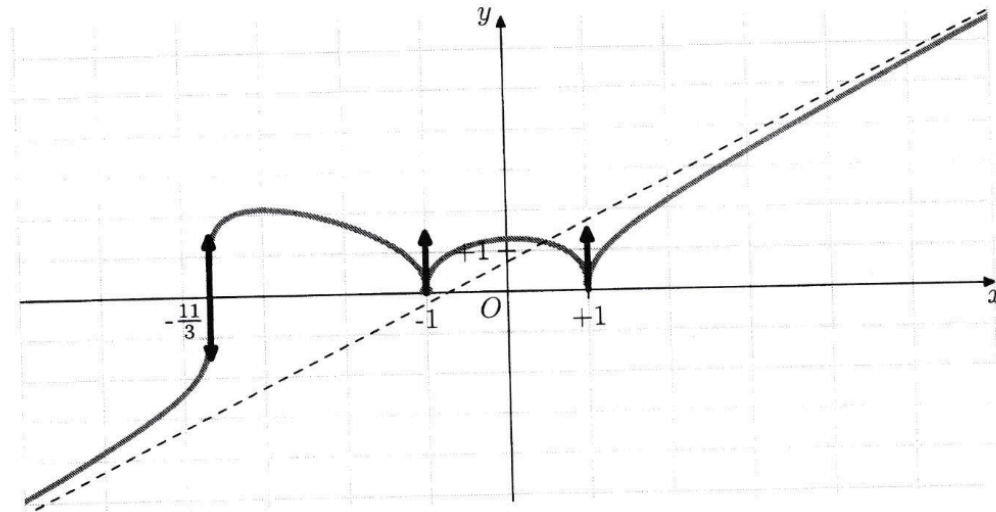
### Solution 13.3

Avec un peu de patience, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{1}{5} \frac{(x^2 - 1)(x + 3)(x - 1/15)}{\sqrt[5]{(x^2 - 1)^8(x + 11/3)^4}} \text{ et } f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{11}{15} - \frac{332}{225x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce qui nous permet de dire que :

- >  $(\Gamma_f)$  admet une asymptote d'équation  $y = x + 11/15$  au voisinage de  $-\infty$  en étant au-dessus de la droite, et de  $-\infty$  en étant en-dessous.
- >  $f$  est croissante sur chacun des intervalles  $]-\infty, -3[$ ,  $]-1, 1/15[$  et  $]1, +\infty[$ , décroissante ailleurs.
- >  $f'(x)$  tend vers l'infini en 1, -1 et 11/3 donc  $(\Gamma_f)$  admet des tangentes verticales en chacun de ces points.



### Solution 13.4

Nous obtenons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  et  $f'(x) = \frac{1 + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$ .

La dérivée est donc positive sur  $[\ln(\sqrt{2} - 1), +\infty[$ , négative ailleurs.

Les points d'inflexion ont pour abscisses les racines de  $f''(x) = \frac{2 - (\operatorname{sh} x + 1)^2}{\operatorname{ch}^2 x}$

Nous sommes alors amenés à résoudre  $e^{2x} + 2(1 \pm \sqrt{2})e^x - 1 = 0$ .

Les solutions sont  $\ln \left( \sqrt{2} \left( \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1 \right) - 1 \right)$  et  $\ln \left( \sqrt{2} \left( \sqrt{2 + \sqrt{2}} - 1 \right) - 1 \right)$ .

