

DEVOIR LIBRE

Exercice 1

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{(t-1, t+1) \in \mathbb{R}^2 / t \in \mathbb{R}_+\} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq -1 \text{ et } y - x - 2 = 0\}$$

Montrer que : $A = B$

Exercice 2

Soient A , B et C des ensembles.

1. Établir l'équivalence : $(A \cup B = B \cap C) \iff A \subset B \subset C$
2. Établir l'implication : $B \neq C \Rightarrow (A \cap B \neq A \cap C \text{ ou } A \cup B \neq A \cup C)$
Indication : On pourra raisonner par contraposition.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto (x + \ln(x))e^{x-1}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A : Étude de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis réaliser l'étude de la branche infinie de $\mathcal{C}$.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$: $\ln(x) + \frac{1}{x} > 0$
5. Déterminer la dérivée f' de f . En déduire le sens de variation de f .
6. Dresser le tableau de variations complet de f .
7. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Partie B : Étude d'une suite numérique.

On considère la suite réelle u donnée par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

8. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$
9. Écrire un script demandant la saisie d'un entier naturel n et renvoyant la valeur u_n .
10. Montrer que u est croissante.
11. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e^n$
12. En déduire l'existence d'un entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.
13. À l'aide d'une boucle while, écrire un programme Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.