

Primitives et équations différentielles

Thème 5 - Primitives usuelles et équations différentielles

■ Comment calculer une intégrale/primitive ?

SF5.1 Reconnaître une primitive usuelle

Le tableau [S5.1] rappelle les primitives usuelles à connaître.

Exemple

Calculer $\int_2^4 \frac{1}{t \ln t} dt$.

On a :

$$\frac{1}{t \ln t} = \frac{1/t}{\ln t},$$

d'où :

$$\int_2^4 \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln |\ln t|]_2^4 = \ln(\ln(4)) - \ln(\ln(2)) = \ln(2 \ln(2)) - \ln \ln(2) = \ln(2).$$

SF5.2 Faire un changement de variables

Exemple

Déterminer une primitive de $\frac{e^{2t}}{1 + e^t}$.

On pose $u = e^t$, on a $du = e^t dt$ donc :

$$\int \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \int \frac{u}{1 + u} du = \int \left(1 - \frac{1}{1 + u}\right) du = u - \ln |1 + u| = e^t - \ln(1 + e^t).$$

SF5.3 Faire une intégration par parties

Exemple

Calculer $\int t \cos t dt$.

On pose $u(t) = t$, $v'(t) = \cos t$, on a alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = \sin t$, d'où :

$$\int t \cos t dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t.$$

Parfois, deux intégrations par parties sont nécessaires :

Exemple

Calculer $\int e^t \cos t dt$.

On pose $u(t) = e^t$ et $v'(t) = \cos t$, on a donc $u'(t) = e^t$ et $v(t) = \sin t$, d'où :

$$\int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt,$$

puis on refait une intégration par parties pour $\int e^t \sin t dt$. Pour cela, on pose $u(t) = e^t$ et $v'(t) = \sin t$, d'où $u'(t) = e^t$ et $v(t) = -\cos t$. On obtient :

$$\int e^t \sin t dt = -e^t \cos t + \int e^t \cos t dt.$$

On a donc :

$$\int e^t \cos t dt = e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t dt,$$

d'où :

$$\int e^t \cos t dt = \frac{e^t}{2} (\cos t + \sin t).$$

■ Comment intégrer une fonction de la forme $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$?

SF5.4 Se ramener à une primitive connue

- Précisément, on calcule le discriminant Δ de $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et on a :
- Si $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine double r , il est donc égal à $a(x - r)^2$ et une primitive de $\frac{1}{a(x - r)^2}$ est $-\frac{1}{a(x - r)}$.
 - Si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . On cherche alors à écrire la fraction comme la somme de deux fonctions

$$\frac{\alpha}{a(x - r_1)} + \frac{\beta}{a(x - r_2)},$$

- que l'on peut intégrer en deux ln.
- Si $\Delta < 0$, on réécrit le polynôme sous la forme $a(1 + X^2)$ afin de l'intégrer en arctan après changement de variable.

Exemple

Déterminer une primitive de $\int \frac{1}{x^2 + x} dx$.

On écrit $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. On peut alors intégrer :

$$\int \frac{1}{x+x^2} \, dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \, dx = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

Exemple

Déterminer une primitive de $\int \frac{1}{x^2+2x+2} \, dx$.

On écrit $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. On a alors :

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} \, dx = \arctan(x+1).$$

■ Comment résoudre une équation différentielle linéaire d’ordre 1 ?

Pour résoudre une équation de la forme $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$, où a , b , c sont des fonctions continues, la méthode est toujours la même.

- On détermine les intervalles sur lesquels a ne s’annule pas (et où les trois fonctions sont définies).
- On résout l’équation homogène sur chacun de ces intervalles.
- On détermine une solution particulière.
- On conclut.

SF5.5 Résoudre l’équation homogène puis trouver une solution particulière

On sait que les solutions de l’équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} \, dx}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

L’unique difficulté est donc de déterminer une primitive de $\frac{b(x)}{a(x)}$.

Exemple

Résoudre l’équation $e^x y'(x) - xy(x) = 0$.

La fonction $x \mapsto e^x$ ne s’annule pas, on résout donc l’équation sur $\mathbf{R}$. On sait que les solutions de l’équation sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{\int x e^{-x} \, dx}.$$

Pour déterminer une primitive de $x \mapsto x e^{-x}$, on fait une intégration par parties :

On pose $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$, on a $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$ donc :

$$\int x e^{-x} \, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -(x+1)e^{-x}.$$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-(x+1)e^{-x}}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Exemple

Résoudre l’équation $xy' - \ln(x)y = 0$.

On se place sur $\mathbf{R}_*^+$, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}(\ln x)^2}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

■ Comment chercher une solution particulière ?

SF5.6 Essayer des solutions « faciles »

Pour trouver une solution particulière, on commence par regarder si une solution « évidente » n’existe pas : n’oubliez pas de tester une fonction constante !

Exemple

Résoudre $x^2 y' + xy = x$.

On travaille sur $\mathbf{R}_*^+$ et $\mathbf{R}_*^-$. L’ensemble des solutions de l’équation homogène sur chacun de ces intervalles est :

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

Il est clair qu’une solution particulière est la fonction constante égale à 1. L’ensemble des solutions de l’équation sur $\mathbf{R}_*^+$ (respectivement $\mathbf{R}_*^-$) est :

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x} + 1, \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

SF5.7 Chercher une solution particulière sous la même forme que le second membre

Cela ne marche malheureusement pas à tous les coups mais, quand c’est le cas, cela vous évite d’utiliser la méthode de la variation de la constante. Voici une liste (non-exhaustive) pour trouver une solution particulière de l’équation

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) :$$

- Si les fonctions a , b et c sont polynômiales et s’il existe un entier m tel que $a(x)m x^{m-1} + b(x)x^m$ est un polynôme de même degré que $c(x)$, alors on peut chercher une solution sous la forme d’un polynôme de degré m .

- Si $c(x) = \alpha \cos(rx) + \beta \sin(rx)$ et si a et b sont des fonctions constantes, on peut chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha' \cos(rx) + \beta' \sin(rx)$.
- Si $c(x) = P(x)e^{rx}$, et si a et b sont constants, on peut chercher une solution particulière sous la forme du produit d'un polynôme et d'une exponentielle mais il faut différencier le cas où $r = -\frac{b}{a}$. Précisément, si $r = -\frac{b}{a}$, c'est-à-dire lorsque $x \mapsto e^{rx}$ est solution de l'équation homogène, on cherche alors une solution particulière sous la forme $x \mapsto xQ(x)e^{rx}$ avec Q de même degré que P . Dans tous les autres cas, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{rx}$ avec Q de même degré que P .

Exemple
Résoudre $xy' + y = x + 3$.

On travaille sur $\mathbf{R}_*^+$ et $\mathbf{R}_*^-$. Les solutions de l'équation homogène sur $\mathbf{R}_*^+$, respectivement $\mathbf{R}_*^-$, sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. On pose $y = ax + b$ et on remplace dans l'équation. En identifiant les coefficients, on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = 3$.

Les solutions sur $\mathbf{R}_*^+$ (respectivement $\mathbf{R}_*^-$) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{2}x + 3, \lambda \in \mathbf{R}.$$

SF5.8 Utiliser la méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$. En injectant dans l'équation, on trouve :

$$a(x)\lambda'(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} = c(x) \iff \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}.$$

✓ Il ne doit rester que du $\lambda'(x)$ (et pas de $\lambda(x)$) quand vous injectez votre solution dans l'équation.

En trouvant une primitive de λ , puis en la multipliant par $e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$, on obtient une solution particulière de l'équation.

Exemple
Résoudre $xy' + y = xe^x$.

On a vu que les solutions de l'équation homogène sur $\mathbf{R}_*^+$, respectivement $\mathbf{R}_*^-$, sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$. On dérive y_p et on remplace dans l'équation. Après simplification, on trouve $\lambda'(x) = xe^x$. On a vu qu'une primitive de $x \mapsto xe^x$ est $x \mapsto (x-1)e^x$. Une solution particulière de l'équation est donc la fonction $x \mapsto \frac{(x-1)e^x}{x}$. On en déduit que les solutions sur $\mathbf{R}_*^+$ (respectivement $\mathbf{R}_*^-$) de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{(x-1)e^x}{x}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

■ Comment « recoller » des solutions ?

SF5.9 Étudier la continuité puis la dérivabilité

Lorsque la fonction devant y' s'annule, on travaille sur différents intervalles. On obtient des solutions de l'équation définies sur ces intervalles. Il est naturel de se demander si une solution définie sur un intervalle plus grand existe. Pour répondre à cette question, on suppose qu'une telle solution existe et on cherche à savoir si elle est bien continue en chaque extrémité des intervalles. Si c'est le cas, on vérifie qu'elle est dérivable. On dit qu'on recolle les solutions si l'on peut définir une solution, c'est-à-dire une fonction dérivable, sur la réunion de deux intervalles.

Exemple
Existe-t-il une solution non nulle de $xy' + (1+x^2)y = 0$ définie sur tout $\mathbf{R}$?

On note $I_1 = \mathbf{R}_*^+$, $I_2 = \mathbf{R}_*^-$. Pour tout $x \in I_i$, $i = 1, 2$, on a :

$$-\frac{1+x^2}{x} = -\frac{1}{x} - x,$$

d'où :

$$\int \left(-\frac{1}{x} - x\right) dx = -\ln(x) - \frac{x^2}{2}.$$

On sait alors que l'ensemble des solutions sur I_i , $i = 1, 2$ est

$$\left\{x \mapsto \frac{\lambda_i e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}, \lambda_i \in \mathbf{R}\right\}.$$

On cherche maintenant une solution définie sur $\mathbf{R}$. On suppose qu'une telle solution existe et on la note f . Il est clair que $f|_{\mathbf{R}_*^+}$ est une solution sur $\mathbf{R}_*^+$ de l'équation donc il existe $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\lambda_1 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

De même, $f|_{\mathbf{R}_*^-}$ est une solution sur $\mathbf{R}_*^-$ donc il existe $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x < 0, f(x) = \frac{\lambda_2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

On a supposé f solution, elle est donc dérivable, ce qui implique continue. Calculons la limite à gauche et à droite de f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

Cette limite est finie si et seulement si $\lambda_1 = 0$. De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lambda_2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

est finie si et seulement si $\lambda_2 = 0$ et dans ce cas, f est nulle. Il n'existe donc pas de solution non nulle définie sur tout $\mathbf{R}$.

Exemple

Déterminer l'ensemble des solutions définies sur tout $\mathbf{R}$ de

$$x^2 y' - y = x^2 - x.$$

On note $I_1 = \mathbf{R}_*^+$, $I_2 = \mathbf{R}_*^-$. On sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur I_i , $i = 1, 2$ est :

$$\left\{ x \mapsto \lambda_i e^{-\frac{1}{x}}, \lambda_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

La fonction identité est une solution particulière, l'ensemble des solutions sur I_i , $i = 1, 2$ est donc :

$$\left\{ x \mapsto \lambda_i e^{-\frac{1}{x}} + x, \lambda_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution définie sur $\mathbf{R}$. On suppose qu'une telle solution existe et on la note f . Il est clair que $f|_{\mathbf{R}_*^+}$ est une solution sur $\mathbf{R}_*^+$ de l'équation donc il existe $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x > 0, f(x) = \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

De même, $f|_{\mathbf{R}_*^-}$ est une solution sur $\mathbf{R}_*^-$ donc il existe $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x < 0, f(x) = \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

On a supposé f solution, elle est donc dérivable, ce qui implique continue. Calculons la limite à gauche et à droite de f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

Cette limite est finie si et seulement si $\lambda_2 = 0$. En revanche,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x = 0, \forall \lambda_1 \in \mathbf{R}.$$

On suppose donc $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ quelconque et $\lambda_2 = 0$ et on a f continue avec $f(0) = 0$. Nous allons calculer la limite du taux d'accroissement en 0^+ et 0^- afin de déterminer si f est bien dérivable en 0 . On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}}}{x} + 1.$$

Par croissances comparées, cette limite est toujours égale à 1 , quel que soit $\lambda_1 \in \mathbf{R}$. On en déduit que les solutions de l'équation définies sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

■ Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ?

SF5.10 Appliquer le cours

Pour avoir une méthode systématique de résolution, on se restreint au cas des équations à coefficients constants. On applique alors la méthode suivante.

- On détermine les racines de l'équation caractéristique.
- On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
- On trouve une solution particulière.
- On conclut.

Exemple

Résoudre $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = xe^x$.

On commence par résoudre l'équation homogène. Pour cela, on cherche les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

qui sont $r = 1$ et $r = 2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)e^x$. Comme 1 est racine de l'équation caractéristique, on cherche un couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x \mapsto x(ax + b)e^x$ est solution de l'équation.

On a :

$$\begin{aligned} y &= (ax^2 + bx)e^x, \\ y' &= (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x, \end{aligned}$$

et

$$y'' = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x.$$

On injecte dans l'équation :

$$y'' - 3y' + 2y = (-2ax + (2a - b))e^x,$$

donc on a :

$$(-2ax + (2a - b))e^x = xe^x \iff (-2ax + (2a - b)) = x.$$

On identifie les coefficients du polynôme :

$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ 2a - b &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -\frac{1}{2} \\ b &= -1 \end{cases}$$

Une solution particulière est :

$$x \mapsto -\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x,$$

on en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Exemple

Déterminer les solutions de $y''(x) + 4y(x) = \sin(2x)$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$, ses racines sont $\pm 2i$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x), (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

On remarque que le second membre est de la forme $\sin(\alpha x)$ avec α la partie imaginaire d'une racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$y : x \mapsto ax \cos(2x) + bx \sin(2x).$$

On a :

$$y' = (a + 2bx) \cos(2x) + (b - 2ax) \sin(2x),$$

et

$$y'' = 4(b - ax) \cos(2x) - 4(a + bx) \sin(2x).$$

On injecte dans l'équation :

$$y'' + 4y = 4b \cos(2x) - 4a \sin(2x),$$

donc :

$$\begin{aligned} y'' + 4y = \sin(2x) &\iff 4b \cos(2x) - 4a \sin(2x) = \sin(2x) \\ &\iff 4b \cos(2x) - (1 + 4a) \sin(2x) = 0 \\ &\iff \begin{cases} 4b &= 0 \\ -4a &= 1, \end{cases} \end{aligned}$$

car les fonctions $\cos$ et $\sin$ ne sont pas proportionnelles. Une solution particulière est la fonction $x \mapsto -\frac{x}{4} \cos(2x)$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{4}\right) \cos(2x) + \mu \sin(2x), (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

■ Comment résoudre une équation quelconque ?

Il n'existe pas de méthode pour résoudre des équations autres que les deux que nous avons vues précédemment : linéaire d'ordre 1 et linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Vous pouvez être confrontés à deux types d'équations.

1. Des équations linéaires d'ordre 2 dont les coefficients sont des polynômes. L'énoncé vous incitera alors à chercher les solutions polynômiales. Il faudra commencer par déterminer le degré d'une telle solution en raisonnant avec le terme dominant.
2. Des équations non linéaires d'ordre 1 ou 2. Dans ce cas, un changement de variables ou l'introduction d'une autre fonction permet de se ramener à une équation linéaire, que l'on sait résoudre.

SF5.11 Chercher les solutions polynômiales

Exemple

Chercher les solutions polynômiales de l'équation :

$$xy'' + 2xy' - 3y = x^3 + 2x^2 - 2.$$

On commence par chercher le degré d'un polynôme P solution de l'équation. Comme il est nécessairement non nul, on note $a_n x^n$ son terme dominant. Alors $xP''(x)$ est de degré $n-1$, tandis que $2xP'(x)$ et $-3P(x)$ sont de degré n . Le terme dominant de $xP''(x) + 2xP'(x) - 3P(x)$ est $2na_n X^n - 3a_n X^n$. Si P est solution, on doit donc avoir $n = 3$ (et $2na_n - 3a_n = 1$ donc $a_n = \frac{1}{3}$). On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$y : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c.$$

On a :

$$y' = x^2 + 2ax + b \text{ et } y'' = 2x + 2a,$$

donc :

$$xy'' + 2xy' - 3y = x^3 + (2 + a)x^2 + (2a - b)x - 3c.$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} 2 + a &= 2 \\ 2a - b &= 0 \\ -3c &= -2 \end{cases}.$$

L'unique solution polynômiale de l'équation est :

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}.$$

SF5.12 Changer de fonction**Exemple**

Résoudre l'équation

$$x^2 y^2(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

On pose $z = \frac{1}{y}$, on a alors $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Si y ne s'annule pas, on a :

$$\begin{aligned} x^2 y^2(x) - xy'(x) + y(x) = 0 &\iff x^2 - x \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ &\iff x^2 + xz' + z = 0. \end{aligned}$$

Résolvons l'équation en z . On travaille sur $\mathbf{R}_*^+$ et $\mathbf{R}_*^-$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbf{R}$.

Une solution particulière est $x \mapsto -\frac{x^2}{3}$. On la trouve avec l'intuition qu'une fonction de la forme $x \mapsto ax^2$ a de bonnes chances de marcher et on trouve $a = -\frac{1}{3}$. On peut aussi, mais c'est plus long, chercher une solution sous la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Enfin, la méthode de la variation de la constante aboutit aussi.

On sait maintenant que les solutions de l'équation $xz' + z = -x^2$ sur $\mathbf{R}_*^+$, respectivement $\mathbf{R}_*^-$, sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} - \frac{x^2}{3}, \lambda \in \mathbf{R},$$

que l'on peut réécrire aussi :

$$x \mapsto \frac{3\lambda - x^3}{3x}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Toutefois, on ne va conserver que les solutions qui ne s'annulent pas afin d'avoir l'équivalence :

$$y \text{ solution de } x^2 y^2 - xy' + y = 0$$

$$\iff z = \frac{1}{y} \text{ solution de } xz' + z = -x^2.$$

Les solutions de $xz' + z = -x^2$ définies sur $\mathbf{R}_*^+$ et ne s'annulant pas sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{3\lambda - x^3}{3x}, \lambda \in \mathbf{R}_-,$$

et les solutions définies sur $\mathbf{R}_*^-$ et ne s'annulant pas sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{3\lambda - x^3}{3x}, \lambda \in \mathbf{R}_+.$$

On en déduit que les solutions de l'équation $x^2 y^2 - xy' + y = 0$ ne s'annulant pas sont les fonctions de la forme :

$$y : \begin{cases} \mathbf{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x}{3\lambda - x^3} \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}_-$$

ou de la forme :

$$y : \begin{cases} \mathbf{R}_*^- & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x}{3\lambda - x^3} \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}_+.$$

Il est clair qu'on ne peut obtenir une solution ne s'annulant pas et définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exemple

Résoudre $x^2 y''(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbf{R}_*^+$ en effectuant le changement de variable $t = \ln x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(e^t)$).

Comme suggéré, on pose $z(t) = y(e^t)$. On a alors :

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t).$$

On a :

$$\begin{aligned} &x^2 y''(x) + y(x) = 0 \\ \iff &e^{2t} y''(e^t) + y(e^t) = 0 \\ \iff &z''(t) - z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

On détermine les solutions de l'équation $z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1$, ses racines sont $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ donc les solutions de l'équation $z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \left(\alpha \cos \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) + \beta \sin \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \right), (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

Les solutions de $x^2 y''(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbf{R}_*^+$ sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto e^{\frac{\ln(x)}{2}} \left(\alpha \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln(x)}{2} \right) + \beta \sin \left(\frac{\sqrt{3} \ln(x)}{2} \right) \right), (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2,$$

ce qu'on peut simplifier :

$$x \mapsto \sqrt{x} \left(\alpha \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln(x)}{2} \right) + \beta \sin \left(\frac{\sqrt{3} \ln(x)}{2} \right) \right), (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

À vous de jouer !

Exercice 5.1

SF5.1

Déterminer $\int x^3 \sqrt{2+x^4} \, dx$.

Exercice 5.2

SF5.3

Calculer $\int t^2 \cos t \, dt$.

Exercice 5.3

SF5.2

SF5.3

Déterminer $\int (\arcsin x)^2 \, dx$.

Exercice 5.4

SF5.4

Déterminer $\int \frac{x-1}{x^2+x} \, dx$.

Exercice 5.5

SF5.4

Déterminer $\int \frac{1}{2+x^2} \, dx$.

Exercice 5.6

SF5.1

SF5.4

Déterminer $\int \frac{4x+3}{2+x^2} \, dx$.

Exercice 5.7

SF5.4

Déterminer $\int \frac{1}{9x^2+6x+5} \, dx$.

Exercice 5.8

SF5.1

ou SF5.3

Déterminer $\int \frac{x}{x+1} \, dx$.

Exercice 5.9

SF5.1

Déterminer $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} \, dx$.

Exercice 5.10

SF5.5

SF5.8

Résoudre $y' - \frac{x}{1+x^2}y = x$.

Exercice 5.11

SF5.4

SF5.9

Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation $(1-x)^2y' = (2-x)y$?

Exercice 5.12

SF5.5

SF5.6

SF5.9

Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation $x^2y' + y = x^2 + x$?

Exercice 5.13

SF5.10

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Exercice 5.14

SF5.12

SF5.10

Résoudre $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$ sur $\mathbf{R}$ en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(\tan(t))$).

Exercice 5.15

SF5.13

Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que pour tous x et y réels, on ait

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

Exercice 5.16

SF5.12

SF5.10

SF5.11

- 1) Résoudre l'équation $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbf{R}_*^+$ en posant $z(t) = y(e^t)$.
- 2) Trouver une solution polynômiale de $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$.
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$ sur $\mathbf{R}_*^+$.

Exercice 5.17

SF5.13

Soit λ un réel. Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que pour tout x réel, on ait $f'(x) = f(\lambda - x)$.

Exercice 5.18

SF5.5

SF5.9

Résoudre l'équation différentielle $x(x - 1)y' - (3x - 1)y + x^2(x + 1) = 0$. Étudier les raccordements possibles des solutions en 0 et en 1.

Exercice 5.19

SF5.5

SF5.8

Résoudre sur $\mathbf{R}_*^+$ l'équation $x(1 + \ln^2 x)y' + 2y \ln x = 1$.

Exercice 5.20

SF5.5

SF5.6

Résoudre $\sqrt{1 - x^2}y' + y = 1$ sur $] - 1, 1[$.

Exercice 5.21

SF5.13

Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) - f(-x) = e^x$.

Exercice 5.22

SF5.13

Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) - f(x) = f(1) - f(0).$$

Correction des exercices**Exercice 5.1**

On pose $u(x) = x^4 + 2$, alors $u'(x) = 4x^3$.
On a :

$$x^3 \sqrt{2 + x^4} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} u'(x) \sqrt{u(x)} \right)$$

donc :

$$\int x^3 \sqrt{2 + x^4} dx = \frac{1}{6} (2 + x^4)^{3/2}.$$

Exercice 5.2

On pose

$$I = \int t^2 \cos(t) dt.$$

On fait une intégration par parties en posant $u(t) = t^2$ et $v'(t) = \cos(t)$. On a $u'(t) = 2t$ et $v(t) = \sin(t)$ donc :

$$I = t^2 \sin(t) - \int 2t \sin(t) dt.$$

On fait, à nouveau une intégration par parties dans la deuxième intégrale. On pose $u(t) = 2t$ et $v(t) = \sin(t)$. On a alors $u'(t) = 2$ et $v(t) = -\cos(t)$. On a donc :

$$\begin{aligned} I &= t^2 \sin(t) + 2t \cos(t) - \int 2 \cos(t) dt \\ &= t^2 \sin(t) + 2t \cos(t) - 2 \sin(t). \end{aligned}$$

Exercice 5.3

On pose $u(x) = \arcsin x$. On a :

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

d'où :

$$dx = \sqrt{1 - \sin^2(u)} du = \cos u du,$$

car $\cos u > 0$ puisque

$$u = \arcsin x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

On a donc :

$$\int (\arcsin x)^2 dx = \int u^2 \cos u du.$$

On a calculé cette intégrale à l'exercice précédent :

$$\begin{aligned} \int u^2 \cos u du &= u^2 \sin u + 2u \cos u - 2 \sin u. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int (\arcsin x)^2 dx &= \arcsin^2 x \sin(\arcsin x) \\ &\quad + 2 \arcsin x \cos(\arcsin x) \\ &\quad - 2 \sin(\arcsin(x)), \end{aligned}$$

soit, après simplification :

$$\begin{aligned} \int (\arcsin x)^2 dx &= x (\arcsin x)^2 + 2 \arcsin x \sqrt{1-x^2} - 2x. \end{aligned}$$

Exercice 5.4

On écrit :

$$\frac{x-1}{x^2+x} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+x} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= 2 \ln|x+1| - \ln|x| \\ &= \ln \frac{(x+1)^2}{|x|}. \end{aligned}$$

Exercice 5.5

On écrit :

$$\int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx.$$

On pose $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, on a $dy = \frac{dx}{\sqrt{2}}$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{1 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 5.6

On écrit :

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+3}{2+x^2} dx &= \int \frac{4x}{2+x^2} dx + \int \frac{3}{2+x^2} dx. \end{aligned}$$

On a :

$$\int \frac{4x}{2+x^2} dx = 2 \ln(2+x^2),$$

et, d'après l'exercice précédent,

$$\int \frac{3}{2+x^2} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+3}{2+x^2} dx &= 2 \ln(2+x^2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 5.7

On écrit :

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 5 &= (3x+1)^2 + 4 \\ &= 4 \left(\left(\frac{3x+1}{2} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

On pose $y = \frac{3x+1}{2}$, on a :

$$dy = \frac{3dx}{2}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9x^2 + 6x + 5} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{2}{3(1+y^2)} dy \\ &= \frac{1}{6} \arctan y \\ &= \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{3x+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 5.8

On écrit :

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1},$$

donc :

$$\int \frac{x}{x+1} dx = x - \ln|x+1|.$$

Si l'on ne voit pas l'astuce, on peut faire une intégration par parties. Pour alléger les notations, on suppose $x+1 > 0$, le cas $x+1 < 0$ se traite de manière identique.

On pose $v'(x) = \frac{1}{x+1}$ et $u(x) = x$. On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x+1)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1} dx &= x \ln(x+1) - \int \ln(x+1) dx. \end{aligned}$$

On fait une deuxième intégration par parties pour trouver une primitive de $\ln(x+1)$. On pose :

$$u(x) = \ln(x+1), \quad v'(x) = 1.$$

On a $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ et $v(x) = x+1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int \ln(x+1) dx &= (x+1) \ln(x+1) - \int dx \\ &= (x+1) \ln(x+1) - x. \end{aligned}$$

LEBY-KOUADOU

On en déduit que :

$$\int \frac{x}{x+1} \, dx$$

$$= x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x+1) + x$$

$$= x - \ln(x+1).$$

On retrouve le résultat ci-dessus.

Exercice 5.9

On écrit :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1},$$

on a donc :

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx = \int \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 \, dx$$

$$= 2 \ln(e^x + 1) - x,$$

avec $e^x + 1 > 0$.

Exercice 5.10

On travaille sur $\mathbf{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{\int \frac{x}{x^2+1} \, dx}, \lambda \in \mathbf{R},$$

c'est-à-dire les fonctions :

$$x \mapsto \lambda \sqrt{1+x^2}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution y_p sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\sqrt{1+x^2}$. On dérive y_p :

$$y'-p(x) = \lambda'(x)\sqrt{1+x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\lambda(x).$$

On a y_p solution de l'équation si et seulement si :

$$\lambda'(x)\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\lambda(x)$$

$$- \frac{x}{1+x^2}\sqrt{1+x^2}\lambda(x) = x.$$

On obtient $\lambda'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, puis $\lambda(x) = \sqrt{1+x^2}$. En remplaçant $\lambda(x)$

dans l'expression de y_p , on obtient qu'une solution particulière est :

$$x \mapsto 1 + x^2$$

et les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \sqrt{1+x^2} + 1 + x^2.$$

Exercice 5.11

On travaille sur un intervalle sur lequel $(1-x)^2$ ne s'annule pas.

On note $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$. On remarque que :

$$\frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions sur I_i , pour $i = 1, 2$ est :

$$x \mapsto \frac{\lambda_i e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}, \lambda_i \in \mathbf{R}.$$

On suppose qu'il existe une solution réelle f . Alors $f|_{I_i}$ est solution sur I_i donc il existe $\lambda_i, i = 1, 2$ tels que :

$$f(x) = \frac{\lambda_i e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}, \forall x \in I_i, i = 1, 2.$$

Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lambda_2 e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} = 0,$$

tandis que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda_1 e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} = +\infty,$$

dès lors que $\lambda_1 \neq 0$. Si $\lambda_1 = 0$, en revanche, on a bien une fonction continue en 1.

Est-elle dérivable? On calcule le taux d'accroissement. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 0,$$

puisque $f(x) = 0, \forall x \leq 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 0,$$

par croissance comparée. L'ensemble des solutions réelles est donc l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

Exercice 5.12

On commence par résoudre sur $\mathbf{R}_*^+$ et $\mathbf{R}_*^-$. Les solutions de l'équation homogène sur $\mathbf{R}_*^+$ (respectivement sur $\mathbf{R}_*^-$) sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{1}{x^2} \, dx} = \lambda e^{\frac{1}{x}}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

On remarque que la fonction identité est une solution particulière, les solutions de l'équation sur $\mathbf{R}_*^+$ (respectivement $\mathbf{R}_*^-$) sont :

$$x \mapsto x + \lambda e^{\frac{1}{x}}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

On veut maintenant savoir s'il existe une solution définie sur tout $\mathbf{R}$. On suppose qu'une telle fonction f existe. Alors $f|_{\mathbf{R}_*^+}$ est solution de l'équation sur $\mathbf{R}_*^+$ donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_*^+, f(x) = x + \lambda e^{\frac{1}{x}}.$$

De même, $f|_{\mathbf{R}_*^-}$ est solution de l'équation sur $\mathbf{R}_*^-$ donc il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_*^-, f(x) = x + \mu e^{\frac{1}{x}}.$$

Pour que f soit solution, elle doit être dérivable sur tout $\mathbf{R}$. En particulier, elle doit être continue en 0. On étudie donc la limite de f en 0^+ et 0^- .

- On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ donc la limite en 0^+ de f n'est finie que si $\lambda = 0$. Dans ce cas, elle vaut 0.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ donc $\forall \mu \in \mathbf{R}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

Pour le moment, on sait que, pour que f soit continue, elle doit être de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x + \mu e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

pour tout $\mu \in \mathbf{R}$.

LMAUTUN 24-25

Voyons maintenant si ces fonctions sont dérivables en 0. Pour cela, on étudie la limite du taux d'accroissement :

- On a $\frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- Par croissances comparées, $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \mu e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1,$$

pour tout $\mu \in \mathbf{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équation définies sur tout $\mathbf{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x + \mu e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \end{cases}, \mu \in \mathbf{R}.$$

Exercice 5.13

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

dont les racines sont 1 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

On remarque que le second membre est de la forme e^{rx} avec $r = 2$ racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \mapsto a x e^{2x}.$$

On a :

- $y_p'(x) = (2ax + a)e^{2x}$,
 - et $y_p''(x) = (4ax + 4a)e^{2x}$.
- En remplaçant dans l'équation, on trouve $a = 1$ donc une solution particulière est $y_p : x \mapsto x e^{2x}$ et les solutions de l'équation sont :

$$x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x + x e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 5.14

On pose $y(x) = z(\arctan x)$. En dérivant cette égalité deux fois on obtient :

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x),$$

puis :

$$y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} z''(\arctan x) - \frac{2x}{(1+x^2)^2} z'(\arctan x).$$

On a :

$$(1+x^2)^2 y''(x) + 2x(1+x^2) y'(x) + 4y(x) = z''(\arctan x) + 4z(\arctan x)$$

donc y est solution de l'équation si et seulement si z est solution de l'équation :

$$z''(t) + 4z(t) = 0.$$

Les solutions de cette équation d'ordre 2 à coefficients constants sont les fonctions :

$$t \mapsto \alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t), (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation initiale sont les fonctions :

$$x \mapsto \alpha \cos(2 \arctan x) + \beta \sin(2 \arctan x),$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

On peut simplifier l'expression des solutions. En effet, on a :

$$\begin{aligned} &\cos(2 \arctan(x)) \\ &= 2 \cos^2(\arctan(x)) - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2(\arctan(x))} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sin(2 \arctan(x)) \\ &= 2 \sin(\arctan(x)) \cos(\arctan(x)) \\ &= 2 \tan(\arctan(x)) \cos^2(\arctan(x)) \\ &= \frac{2x}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$x \mapsto \frac{\alpha(1-x^2)}{1+x^2} + \frac{2\beta x}{1+x^2}, (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 5.15

Soit f une solution de l'équation fonctionnelle. On remarque que pour :

$$x = y = 0,$$

on a $2f(0) = 2(f(0))^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 0$, alors pour x quelconque et $y = 0$, on obtient :

$$2f(x) = 0,$$

donc f est la solution nulle.

Déterminons les solutions non nulles de cette équation. Elles vérifient donc $f(0) = 1$.

On commence par dériver l'égalité par rapport à y . On obtient :

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y),$$

puis en dérivant à nouveau par rapport à y :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

Ceci est vrai pour tout x et tout y . En particulier, cela doit être vrai pour $y = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 2f''(x) = 2f(x)f''(0),$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f''(x) = f(x)f''(0).$$

On pose $\alpha = f''(0)$, on cherche donc les fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} f''(x) - \alpha f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R} \\ f''(0) = \alpha. \end{cases}$$

On résout l'équation différentielle :

$$y'' - \alpha y = 0 :$$

- Si $\alpha > 0$, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}x) + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha}x)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

- Si $\alpha = 0$, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto ax + b.$$

- Si $\alpha < 0$, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{-\alpha}x) + \mu \sin(\sqrt{-\alpha}x),$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

On a :

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y),$$

donc pour $x = y = 0$, on a $f(0)f'(0) = 0$. Les seules fonctions affines satisfaisant ceci sont les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ ou $x \mapsto b$.

Dans les deux autres cas, $f(0) = \lambda = 1$ donc on a nécessairement $f'(0) = 0$ ce qui impose $\mu = 0$.

Ainsi, les fonctions recherchées appartiennent à l'ensemble des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} &- x \mapsto \operatorname{ch}(cx), \quad c \in \mathbf{R}^+ \\ &- x \mapsto ax, \quad a \in \mathbf{R}, \\ &- x \mapsto b, \quad b \in \mathbf{R}, \\ &- x \mapsto \cos(cx), \quad c \in \mathbf{R}^+. \end{aligned}$$

Déterminons, parmi ces fonctions, celles qui satisfont l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Les deux fonctions :

$$x \mapsto \cos(cx)$$

et

$$x \mapsto \operatorname{ch}(cx)$$

satisfont l'équation fonctionnelle pour tout réel positif c . En revanche, pour $x \mapsto ax$, l'équation n'est satisfaite que pour $a = 0$. Pour la fonction constante, on doit avoir $2b = 2b^2$ ce qui impose $b = 0$ ou $b = 1$.

Au final, les solutions sont la fonction nulle, la fonction constante égale à 1 et les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(cx)$ avec $c > 0$ et $x \mapsto \cos(cx)$ avec $c > 0$.

Exercice 5.16

1) On pose $z(t) = y(e^t)$. On a alors :

$$z'(t) = e^t y'(e^t)$$

et

$$z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(t).$$

On a :

$$\begin{aligned} &x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \\ \iff &z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique de :

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$$

est :

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Elle possède une racine double donc les solutions de $z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$ sur $\mathbf{R}_*^+$ sont les fonctions :

$$t \mapsto (at + b)e^{-t}, \quad (a, b) \in \mathbf{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de $x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbf{R}_*^+$ sont les fonctions :

$$x \mapsto (a \ln x + b)e^{-\ln x}, \quad (a, b) \in \mathbf{R}^2,$$

ce qui se réécrit :

$$x \mapsto \frac{(a \ln x + b)}{x}, \quad (a, b) \in \mathbf{R}^2.$$

2) Si une solution polynômiale existe, notons ax^n son terme dominant. Le terme dominant de $x^2 y''(x)$ est :

$$n(n-1)ax^{n-2}x^2 = n(n-1)ax^n.$$

Le terme dominant de $3xy'(x)$ est $3nax^n$ et celui de $y(x)$ est ax^n . On doit donc avoir :

$$n(n-1)ax^n + 3nax^n + ax^n = 3x^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} n(n-1) + 3n + 1 &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

il faut donc $n = 2$. On cherche donc une solution polynômiale sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. On a :

$$\begin{aligned} &y_p \text{ solution} \\ \iff &9ax^2 + 4bx + c = 3x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

LEBY-KOUADOU

3) D'après les deux questions précédentes, on en déduit que les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ sont :

$$x \mapsto \frac{(a \ln x + b)}{x} + \frac{x^2}{3} + x + 1, \quad (a, b) \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 5.17

Soit f une fonction deux fois dérivable vérifiant $f'(x) = f(\lambda - x)$. Ceci étant valable pour tout x réel, et f étant dérivable deux fois, on peut dériver l'égalité. On obtient $f''(x) = -f'(\lambda - x)$ ou par hypothèse,

$$f'(\lambda - x) = f(\lambda - (\lambda - x)) = f(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y'' = -y$. Elle est donc de la forme $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

Réciproquement, à quelle(s) condition(s) une fonction de la forme :

$$x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$$

est-elle solution ? Si elle est solution, on a $f(\lambda - x) = f'(x)$ donc :

$$\begin{aligned} \alpha \cos(\lambda - x) + \beta \sin(\lambda - x) \\ = -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) \end{aligned}$$

Le membre de gauche est égal à :

$$\begin{aligned} \alpha \cos(\lambda) \cos(x) + \alpha \sin(\lambda) \sin(x) \\ + \beta \sin(\lambda) \cos(x) - \beta \cos(\lambda) \sin(x) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \alpha \cos(\lambda) + \beta \sin(\lambda) = \beta \\ \alpha \sin(\lambda) - \beta \cos(\lambda) = -\alpha, \end{cases}$$

car les fonctions $\cos$ et $\sin$ ne sont pas colinéaires, on peut donc identifier les coefficients devant $\cos$ et $\sin$. On remarque que la fonction nulle (pour $(\alpha, \beta) = 0$) est solution de l'égalité pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. On différencie trois cas, selon la valeur de λ .

Si $\lambda = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, on a :

$$\begin{cases} \beta = \beta \\ \alpha = -\alpha \end{cases}$$

ce qui implique $\alpha = 0$.

Si $\lambda = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, on a :

$$\begin{cases} -\beta = \beta \\ -\alpha = -\alpha \end{cases}$$

ce qui implique $\beta = 0$.

On suppose maintenant que :

$$\lambda \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Le système précédent est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \beta(1 - \sin(\lambda)) = \alpha \cos(\lambda) \\ \beta \cos(\lambda) = \alpha(\sin(\lambda) + 1) \end{cases}$$

La deuxième ligne implique :

$$\beta = \alpha \frac{1 + \sin(\lambda)}{\cos(\lambda)}.$$

Réinjectons cette valeur de β dans la première ligne du système ; on obtient :

$$(1 - \sin(\lambda))\alpha \frac{\sin(\lambda) + 1}{\cos(\lambda)} = \alpha \cos(\lambda),$$

ce qui est équivalent, puisqu'on a supposé $\cos(\lambda) \neq 0$, à :

$$\alpha(1 - \sin^2(\lambda)) = \alpha \cos^2(\lambda),$$

ce qui est vrai pour tout λ . Ainsi, on a montré :

– Si $\lambda = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto \beta \sin(x), \beta \in \mathbf{R}.$$

– Si $\lambda = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto \alpha \cos(x), \alpha \in \mathbf{R}.$$

– Si $\lambda \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto \alpha \left(\cos(x) + \frac{\sin(\lambda) + 1}{\cos(\lambda)} \sin(x) \right),$$

$\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercice 5.18

On étudie l'équation sur les intervalles où le coefficient $x(x-1)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. Sur chaque intervalle I_i , $i = 1 \dots 3$, on étudie d'abord l'ensemble des solutions de l'équation homogène, c'est-à-dire l'équation :

$$y' - \frac{3x-1}{x(x-1)}y = 0.$$

On a :

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{2x+x-1}{x(x-1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x},$$

donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x(x-1)} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{dx}{x} \\ &= 2 \ln|x-1| + \ln|x| \\ &= \ln|x|(x-1)^2. \end{aligned}$$

On trouve que, sur I_i , l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$x \mapsto \lambda_i x(x-1)^2,$$

$\lambda_i \in \mathbf{R}$.

Pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$x \mapsto \lambda(x)x(x-1)^2.$$

Elle est dérivable sur chacun des intervalles I_i . On a :

$$\begin{aligned} \lambda'(x)x^2(x-1)^3 \\ + \lambda(x)x(3x^2 - 4x + 1)(x-1) \\ - (3x-1)(x-1)^2x\lambda(x) \\ = -x^2(x+1) \end{aligned}$$

ce qui implique $\lambda'(x) = -\frac{(x+1)}{(x-1)^3}$. On réécrit λ' sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda'(x) &= -\frac{(x-1)+2}{(x-1)^3} \\ &= -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

LMAUTUN 24-25

En intégrant chaque terme, on trouve :

$$\lambda(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Une solution particulière est donc :

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)^2}{(x-1)} + \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2} \\ = x(x-1) + x = x^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que, pour $i = 1 \dots 3$, l'ensemble des solutions sur I_i est

$$x \mapsto \lambda_i x(x-1)^2 + x^2, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}.$$

Étudions maintenant le recollement éventuel des solutions. Soit f une solution de l'équation définie sur tout $\mathbf{R}$. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que :

$$f(x) = \lambda_i x(x-1)^2 + x^2, \quad \forall x \in I_i.$$

Comme f est dérivable, elle doit être continue en 0 et en 1. En 0, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \lambda_1 x(x-1)^2 + x^2 = 0,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda_2 x(x-1)^2 + x^2 = 0,$$

donc la continuité en 0 n'impose pas de conditions sur λ_1 et λ_2 .

En 1, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lambda_2 x(x-1)^2 + x^2 = 1,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lambda_3 x(x-1)^2 + x^2 = 1,$$

donc la continuité en 1 n'impose aucune condition sur $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Par hypothèse, f est dérivable en 0 et 1. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lambda_1 x(x-1)^2 + x^2}{x} = \lambda_1,$$

tandis que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_2 x(x-1)^2 + x^2}{x} = \lambda_2.$$

Puisque f est dérivable en 0, on doit avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

En 1, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda_2 x(x-1)^2 + x^2 - 1}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \lambda_2 x(x-1) + (x+1) \\ = 2 \end{aligned}$$

et, de même,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lambda_3 x(x-1)^2 + x^2 - 1}{x-1} = 2,$$

donc f est dérivable pour λ_2 et λ_3 quelconque.

En conclusion, l'ensemble des solutions réelles de l'équation est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f_{\mu,\lambda} : x \mapsto \begin{cases} \mu x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in I_2 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \lambda x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in I_3 \end{cases}$$

avec $(\mu, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ ce qui s'écrit plus simplement :

$$f_{\mu,\lambda}(x) = \begin{cases} \mu x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \lambda x(x-1)^2 + x^2 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

Exercice 5.19

On commence par chercher les solutions de l'équation homogène. On remarque que :

$$\int \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \ln(1 + \ln^2 x).$$

Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{(1 + \ln^2 x)}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. On cherche une solution sous la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{(1 + \ln^2 x)}.$$

On trouve :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x}$$

d'où :

$$\lambda(x) = \ln x$$

et finalement :

$$y_p(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation, définie sur $\mathbf{R}_*^+$ est donc :

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda + \ln x}{1 + \ln^2 x}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$$

Exercice 5.20

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{\arccos x}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

On remarque que la solution constante égale à 1 est une solution particulière, les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{\arccos x} + 1, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Exercice 5.21

Soit f une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) - f(-x) = e^x,$$

alors :

$$f'(x) = f(-x) + e^x,$$

donc f' est dérivable et on a, $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f''(x) = -f'(-x) + e^x.$$

Or $f'(-x) = f(x) + e^{-x}$, donc :

$$f''(x) + f(x) = e^x - e^{-x}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle :

$$f'(x) - f(-x) = e^x$$

est inclus dans l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$f''(x) + f(x) = e^x - e^{-x} = 2\operatorname{sh}(x).$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions :

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x, (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2,$$

une solution particulière est sh , donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$\{x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \operatorname{sh} x, (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Cherchons, parmi ces fonctions, lesquelles vérifient l'équation fonctionnelle. Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \operatorname{sh}(x) \end{cases}$$

On a, $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \operatorname{ch}(x).$$

La fonction f est solution de l'équation fonctionnelle si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$-\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \operatorname{ch}(x) - (\alpha \cos(-x) + \beta \sin(-x) + \operatorname{sh}(-x)) = e^x,$$

ce qui est équivalent à :

$$(\beta - \alpha) \sin(x) + (\beta - \alpha) \cos(x) + \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x.$$

Comme $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$, la fonction f est donc solution si et seulement si $\alpha = \beta$.

On en déduit que les solutions du problème sont les fonctions :

$$x \mapsto \alpha(\cos(x) + \sin(x)) + \operatorname{sh}(x), \alpha \in \mathbf{R}.$$

Exercice 5.22

On suppose qu'une telle fonction f existe et on pose $g : x \mapsto f(x) + f(1) - f(0)$. On a alors :

$$g'(x) - g(x) = 0,$$

donc g est de la forme $x \mapsto \lambda e^x$. On a :

$$g(0) = \lambda = f(1),$$

et

$$g(1) = \lambda e = 2f(1) - f(0).$$

On en déduit que :

$$f(1) = \lambda$$