

[S5.1] Primitives usuelles

Soit u une fonction dérivable, de dérivée continue. On rappelle que $\int f(t) dt$ désigne une primitive de la fonction f .

$\int u(x)^\alpha u'(x) dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}$ si $\alpha \in \mathbf{N}$ $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}^{+*}$ ou $\mathbf{R}^{-*}$ si $\alpha \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}^{+*}$ si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$
$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\ln u(x)]$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}^{+*}$ ou $\mathbf{R}^{-*}$
$\int \cos(u(x)) u'(x) dx = \sin(u(x))$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}$
$\int \sin(u(x)) u'(x) dx = -\cos(u(x))$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}$
$\int \tan(u(x)) u'(x) dx = -\ln \cos(u(x)) $	avec $\text{Im}(u) \subset \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ pour $n \in \mathbf{Z}$
$\int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{u(x)}$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}$
$\int \text{ch}(u(x)) u'(x) dx = \text{sh}(u(x))$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}$
$\int \text{sh}(u(x)) u'(x) dx = \text{ch}(u(x))$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}$
$\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} dx = \arctan(u(x))$	avec $\text{Im}(u) \subset \mathbf{R}$
$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} dx = \arcsin(u(x))$ $= -\arccos(u(x))$	avec $\text{Im}(u) \subset]-1, 1[$
$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} dx = \tan(u(x))$ $= \int (1 + \tan^2(u(x))) dx$	avec $\text{Im}(u) \subset \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ pour $n \in \mathbf{Z}$

Cours – Développements limités des fonctions usuelles.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-x)^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$
 $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\text{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\text{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\text{Arctan}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\tan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

	Fonctions bijectives	Fonctions réciproques
Fonctions hyperboliques	$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{argsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
	$\text{ch} : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$	$\text{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ $\forall x \in]1, +\infty[, (\text{argch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\forall x \in [1, +\infty[, \text{argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
Fonctions circulaires	$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\forall x \in]-1, 1[, (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $\forall x \in]-1, 1[, (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$	$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\forall x \in \mathbb{R}, (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

FORMULAIRE DE TRIGONOMETRIE

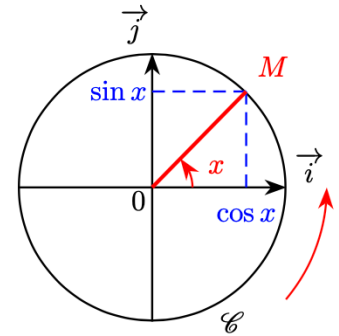
I. Cosinus et sinus d'un réel.

1. Définition :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

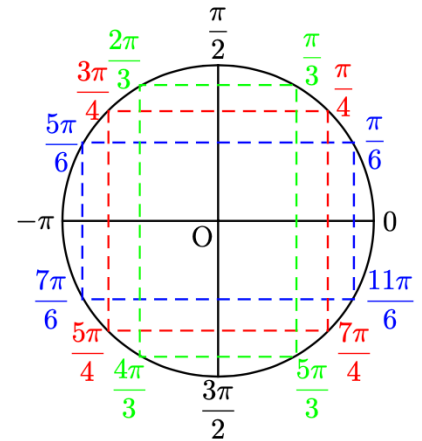
Pour tout réel x , le point M de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x \text{ rad}$ a pour :

- abscisse $\cos x$
- ordonnée $\sin x$



2. Cosinus et sinus d'angles particuliers :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0



II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus.

1. Périodicité :

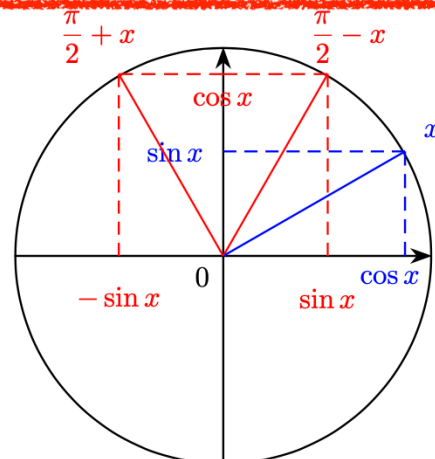
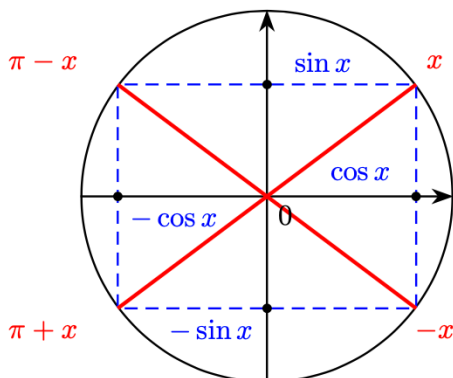
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques.

2. Angles associés :

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$



3. Formules d'addition :

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

4. Formules de duplication et linéarisation :

Pour tout réel a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

III. Etude des fonctions cosinus et sinus.

1. Dérivée :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

♣ si $f(x) = \cos x$ alors $f'(x) = -\sin x$.

♣ si $g(x) = \sin x$ alors $g'(x) = \cos x$.