

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités, dans la mesure du possible, à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel informatique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Liminaire.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que : M diagonalisable $\Rightarrow M^2$ diagonalisable

Étude de deux endomorphismes f et g .

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-y - z, x - z, x + y)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer le rang de A .
4. f est-il bijectif? Que pouvez-vous en déduire concernant le spectre de A ?
5. Déterminer le noyau de f . On en précisera une base et la dimension.

On désigne par :

- I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et i l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^3$;
 - B la matrice égale à $A^2 + 2I$;
 - g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est B .
6. Déterminer la matrice B et montrer que cette matrice est diagonalisable.
 7. Déterminer les réels α et β tels que : $B^2 = \alpha B + \beta I$
 8. Montrer que B est inversible et que : $B^{-1} \in \text{vect}(B, I)$.
 9. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B .
 10. Déterminer une matrice P inversible, de deuxième ligne $(1 \ 1 \ 1)$, et une matrice D diagonale, dont les termes diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $B = PDP^{-1}$.
 11. **On s'intéresse à la diagonalisation de A .**
 - (a) Montrer que, si λ est une valeur propre de A , alors $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B .
 - (b) En déduire le spectre de A .
 - (c) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
 12. **On s'intéresse à la diagonalisation de A^2 .**
 - (a) Montrer que : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
Que pouvez-vous en déduire concernant le spectre de A^2 ?
 - (b) Montrer qu'il existe une matrice Δ diagonale telle que : $A^2 = P\Delta P^{-1}$
Attention, P est la matrice obtenue en 10.

(c) A la lumière de question précédente, quelle précision pouvez-vous apporter au liminaire ?

13. On s'intéresse aux puissances de B .

n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2$. On pose

$$X^n = (X^2 - X - 2) Q_n(X) + R_n(X)$$

où Q_n et R_n sont deux polynômes tels que $\deg R_n \leq 1$.

On note : $R_n(X) = \alpha_n X + \beta_n$.

(a) Déterminer les réels α_n et β_n .

(b) Déterminer l'expression de B^n en fonction de I , B et n .

Exercice 2

Partie A : Étude d'une fonction numérique.

On considère la fonction f définie sur $I =]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Interprétation graphique.
- Déterminer la nature de la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I . Étudier le sens de variation de f sur I .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On notera α la plus grande.
- Montrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[, f(x) \leq x$.

Partie B : Étude de deux suites numériques.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right).$$

- Montrer que : $x \in [0; 1] \Rightarrow f(x) \in [0; 1]$
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.
 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
 - En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 2 \ln(k+2) - 3 \ln(k+1) + \ln(k) \leq f\left(\frac{1}{k}\right)$.
 - Déduire de ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{(n+2)^2}{4(n+1)}\right) \leq S_n$.
 - La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Exercice 3

- Déterminer $\int \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}} dx$.

On pourra procéder au changement de variable $t = \sqrt{x}$.

- (b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, en utilisant la méthode de variation de la constante, l'équation différentielle (L) :

$$2xy' + y = \frac{1}{1+x}$$

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5$

(a) Résoudre (E).

(b) Exprimer les solutions de (E) en fonction de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

(c) Résoudre (E) en développant le polynôme $(1 + iX)^5 - (1 - iX)^5$.

(d) En déduire une expression algébrique de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ puis $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

On considère le déterminant d'ordre n défini par :

$$D_n = |d_{ij}|$$

$$\text{avec } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j + 1 \\ 3 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer D_3 et D_4 .

(b) Montrer que : $D_n = 2D_{n-1} + 3D_{n-2}$

(c) Déterminer l'expression de D_n en fonction de n .