

DEVOIR LIBRE CMG NOVEMBRE

À rendre le 12 novembre.

Exercice 1 Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont mutuellement indépendantes.

1. (a) Résoudre $(z - 1)^n = z^n$.
 (b) Pour $n \geq 2$, montrer que les points d'affixes les solutions sont tous sur une droite parallèle à l'axe Oy et ceci quelque soit la valeur de n .
2. Résoudre $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$.
3. Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^3 x + \cos^4 x$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(\star) : 2xy' - 3y = x^2$

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto f(-x)$.
 Montrer que f est solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, g est solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer les fonctions f solutions de $(\star)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Existe-t-il des fonctions solutions de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

- 1) Calculer A^2 et en déduire que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et la compléter en une base de $\text{Ker}(f)$.
- 3) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indication : On pourra chercher des conditions nécessaires sur $\mathcal{B}'$ pour que $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T$.