

LYCEE MILITAIRE D'AUTUN

MPSI , ANNEE SCOLAIRE 2003-2004

CHAPITRE 4 : **EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

PLAN DU COURS

I) Equations différentielles linéaires du premier ordre

- 1) Généralités
- 2) Résolution de l'équation homogène (H)
- 3) Résolution de l'équation différentielle (L)
- 4) La méthode d'Euler

II) Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

- 1) Généralités
- 2) Résolution de l'équation homogène (H)
- 3) Résolution de l'équation différentielle (L)

Fiche d'exercices sur les **Equations différentielles**

CHAPITRE 4

PREMIERE PERIODE

EQUATIONS

DIFFERENTIELLES

I) Equations différentielles linéaires du premier ordre

1) Généralités

Notations

Pour tout le chapitre :

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$,

$\mathbb{K}$ est soit égal à $\mathbb{R}$, soit égal à $\mathbb{C}$ (la plupart du temps , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ,

$\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble donc fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables sur I .

Rappel

$\int g(x)dx$ désigne une primitive quelconque de la fonction g .

$\int_c^x g(t)dt$ est la primitive de la fonction g qui s'annule en c .

Exemples

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 , \int e^x dx = e^x + k \text{ et } \int_0^x e^t dt = e^x - 1 .$$

d_1 : On appelle équation différentielle linéaire (L) du premier ordre toute équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

d_2 : $y' + a(x)y = b(x)$ est l'équation différentielle avec second membre .

On note $S(L)$ l'ensemble des solutions de (L) sur I .

$y' + a(x)y = 0$ est l'équation différentielle sans second membre , on l'appelle équation homogène (H) .

On note $S(H)$ l'ensemble des solutions de (H) sur I .

d_3 : Une solution f de l'équation différentielle (L) est une fonction de I dans $\mathbb{K}$ dérivable sur I : $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifiant la relation : $\forall x \in I , f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$.

p_1 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{S}(H)^2$ alors $f_1 + \lambda f_2 \in \mathcal{S}(H)$.

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, soit $(f_1, f_2) \in S(H)^2$.

$f_1 + \lambda f_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et

$$\begin{aligned}(f_1 + \lambda f_2)'(x) + a(x)(f_1 + \lambda f_2)(x) &= f_1'(x) + \lambda f_2'(x) + a(x)f_1(x) + \lambda a(x)f_2(x) \\ &= f_1'(x) + a(x)f_1(x) + \lambda(f_2'(x) + a(x)f_2(x)) \\ &= 0 .\end{aligned}$$

On en déduit que $f_1 + \lambda f_2 \in S(H)$.

p_2 : Soit (L) : $y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I .

Soit y_0 une solution particulière de (L) , alors toute solution de (L) s'écrit comme la somme d'une solution de (H) et de y_0 , c'est-à-dire : $S(L) = y_0 + S(H)$.

Preuve

Soit $y_0 \in S(L)$, c'est-à-dire $y_0 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $y_0' + a(x)y_0 = b(x)$.

$$S(L) \subset y_0 + S(H) ?$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } y \in S(L) &\Rightarrow y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \text{ et } y' + a(x)y = b(x) \Rightarrow y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \text{ et } y' + a(x)y = y'_0 + a(x)y_0 \\ &\Rightarrow y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \text{ et } (y - y_0)' + a(x)(y_0 - y) = 0 \Rightarrow y - y_0 \in S(H) \Rightarrow y \in y_0 + S(H) . \end{aligned}$$

$$y_0 + S(H) \subset S(L) ?$$

$$\text{Soit } y \in y_0 + S(H) \Rightarrow \exists h \in S(H) / y = y_0 + h .$$

$$y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \text{ et } y' + a(x)y = (y_0 + h)' + a(x)(y_0 + h) = y'_0 + a(x)y_0 + h' + a(x)h = b(x) + 0 = b(x) \text{ donc } y \in \mathcal{S}(L) .$$

Conclusion

Pour résoudre l'équation différentielle $(L) : y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I , il faut résoudre l'équation différentielle $(H) : y' + a(x)y = 0$, trouver une solution particulière y_0 de (L) et faire la somme de y_0 et de $S(H)$.

2) Résolution de l'équation homogène (H)

Th₁ : Soit $(H) : y' + a(x)y = 0$ où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur I .

Les solutions de (H) sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\int a(x)dx}$, $k \in \mathbb{K}$.

Démonstration

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une solution de (H) , on a donc f dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = 0$.

La fonction a est continue sur I , soit A une primitive de a sur I , c'est-à-dire, $\forall x \in I$, $A'(x) = a(x)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in I, [f'(x) + a(x)f(x)]e^{A(x)} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, [f(x)e^{A(x)}]' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{K} / \forall x \in I, f(x)e^{A(x)} = k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{K} / \forall x \in I, f(x) = ke^{-A(x)} = ke^{-\int a(x)dx} . \end{aligned}$$

Exemple

$$\text{Soit } (H) : (\cos x)y' + (\sin x)y = 0 \text{ sur } I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = 0 \Rightarrow y' = -(\tan x)y \Rightarrow y = ke^{-\int \tan x dx} = ke^{\ln|\cos x|} = ke^{\ln(\cos x)} = k \cos x, k \in \mathbb{R} .$$

3) Résolution de l'équation différentielle (L)

Soit $(L) : y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I .

On commence par résoudre (H) , $S(H) = \{x \mapsto ke^{-\int a(x)dx}, k \in \mathbb{K}\}$.

Il faut trouver une solution particulière y_0 de (L) .

Si les fonctions a et b sont des polynômes, on peut essayer de rechercher y_0 sous la forme d'un polynôme.

$$\begin{aligned} a(x) = P_1(x) \text{ et } b(x) = P_2(x) &\rightarrow y_0 = P_3(x) , \\ a(x) = P_1(x)e^{\alpha x} \text{ et } b(x) = P_2(x)e^{\alpha x} &\rightarrow y_0 = P_3(x)e^{\alpha x} , \\ a(x) = \cos(ax)e^{\alpha x} \text{ et } b(x) = \sin(ax)e^{\alpha x} &\rightarrow y_0 = [A \cos(ax) + B \sin(ax)]e^{\alpha x} . \end{aligned}$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - xy = x$.

Résolution de l'équation homogène $y' - xy = 0$:

$$y' - xy = 0 \Rightarrow y' = xy \Rightarrow y = ke^{\int x dx} = ke^{\frac{x^2}{2}}, k \in \mathbb{R} .$$

Recherche d'une solution particulière :

$$y_0 = -1 \text{ est une solution particulière de } (E) .$$

On a donc : sur $\mathbb{R}$, les solutions de (E) sont les fonctions $y = -1 + ke^{\frac{x^2}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$.

p₃ : Soit $(L) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ où $a, b_1, b_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I .

Si y_1 (resp. y_2) est une solution particulière de $y' + a(x)y = b_1(x)$ (resp. $y' + a(x)y = b_2(x)$) alors

$$y_3 = y_1 + y_2 \text{ est une solution particulière de } y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) .$$

Preuve

$$(y_1, y_2) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})^2 \Rightarrow y_3 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) .$$

$$y'_3 + a(x)y_3 = (y_1 + y_2)' + a(x)(y_1 + y_2) = y'_1 + a(x)y_1 + y'_2 + a(x)y_2 = b_1(x) + b_2(x) .$$

On en déduit que y_3 est une solution de (L) .

Méthode de la variation de la constante

Soit $(L) : y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I .

On commence par résoudre (H) , $S(H) = \{x \mapsto ke^{-\int a(x)dx}, k \in \mathbb{K}\}$.

Il faut trouver une solution particulière y_0 de (L) .

On recherche y_0 sous la forme $y_0(x) = k(x)e^{-A(x)}$, c'est-à-dire on fait varier la constante k .

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (L) &\Rightarrow y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x) \Rightarrow k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ &\Rightarrow k'(x)e^{-A(x)} = b(x) \Rightarrow k'(x) = b(x)e^{A(x)} \Rightarrow k(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx \Rightarrow y_0 = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx. \end{aligned}$$

La réciproque est immédiate.

$S(L) = y_0 + S(H)$ donc les solutions de (L) sur I s'écrivent :

$$y = \underbrace{ke^{-A(x)}}_{S(H)} + \underbrace{e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx}_{\text{solution particulière de } (L)}, \quad k \in \mathbb{K} \quad \text{où } A(x) = \int a(x)dx.$$

p_4 : Soit $(L) : y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I .

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de cette équation différentielle vérifiant $f(x_0) = y_0$.

$f(x_0) = y_0$ est la condition initiale.

Preuve

La solution générale de (L) sur I s'écrit $y = e^{-A(x)}\left(k + \int b(x)e^{A(x)}dx\right)$ avec $k \in \mathbb{K}$, A désigne une primitive de a sur I .

On prend $A(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt$ et $f(x) = e^{-A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt\right)$.

On a $f \in S(L)$ et $f(x_0) = y_0$.

Remarque

Soit $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où a, b et c sont des fonctions.

On détermine le ou les intervalles I par les conditions :

Les fonctions a, b et c sont continues et la fonction a ne s'annule pas.

Ensuite, on divise l'équation différentielle par $a(x)$ pour $x \in I$ et on applique la méthode précédente.

4) La méthode d'Euler

Soient $(L) : y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I et $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.

On note f l'unique solution de (L) vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

On a donc : $\forall x \in I, f(x) = e^{-A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt\right)$ avec $A(x) = \int a(x)dx$.

Soit h un nombre réel strictement positif assez petit.

On se propose d'obtenir une approximation de f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + nh]$, $n \in \mathbb{N}$.

On note $x_k = x_0 + kh$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $x_{k+1} - x_k = x_0 + (k+1)h - x_0 - kh = h$.

$$h \text{ petit} \Rightarrow x_{k+1} \approx x_k \Rightarrow \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \approx f'(x_k) \Rightarrow f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f'(x_k).$$

Or $x_{k+1} - x_k = h$ et $f'(x_k) = -a(x_k)f(x_k) + b(x_k)$, il vient : $f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + h(-a(x_k)f(x_k) + b(x_k))$.

On définit la suite $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ par : $y_0 = f(x_0)$ et $y_{k+1} = y_k + h(-a(x_k)y_k + b(x_k))$, $0 \leq k \leq n-1$.

$$y_1 - f(x_1) \approx y_0 + h(-a(x_0)y_0 + b(x_0)) - f(x_0) - h(-a(x_0)f(x_0) + b(x_0)) = 0 \Rightarrow y_1 \approx f(x_1).$$

$$y_2 - f(x_2) \approx y_1 + h(-a(x_1)y_1 + b(x_1)) - f(x_1) - h(-a(x_1)f(x_1) + b(x_1)) \approx 0 \Rightarrow y_2 \approx f(x_2).$$

$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, y_k \approx f(x_k)$ donc le point $M_k(x_k, y_k)$ approche le point $(x_k, f(x_k))$.

On approche la courbe de f sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ par le segment $[M_k, M_{k+1}]$.

La ligne brisée $[M_0M_1, \dots, M_n] = [M_0M_1] \cup [M_1M_2] \cup \dots \cup [M_{n-1}M_n]$ est une approximation de la courbe de f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + nh]$.

Exemple

Soit l'équation différentielle (E) : $(e^x + 1)y' - e^x y = 2x(e^x + 1)^2$, $y(0) = -2$.

$$(e^x + 1)y' - e^x y = 2x(e^x + 1)^2 \Leftrightarrow y' - \frac{e^x}{e^x + 1}y = 2x(e^x + 1).$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et on la résout sur $I = \mathbb{R}$.

Résolution de l'équation différentielle (E) :

Résolution de l'équation homogène (H) :

$$y' - \frac{e^x}{e^x + 1}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{e^x}{e^x + 1}y \Rightarrow y = ke^{\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx} = ke^{\ln(e^x + 1)} = k(e^x + 1), k \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_0 :

On effectue la méthode de la variation de la constante, on recherche y_0 sous la forme $y_0 = k(x)(e^x + 1)$.

$$\begin{aligned} y_0' - \frac{e^x}{e^x + 1}y_0 &= 2x(e^x + 1) \Leftrightarrow k'(x)(e^x + 1) + k(x)e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}(e^x + 1)k(x) = 2x(e^x + 1) \\ &\Leftrightarrow k'(x) = 2x \\ &\Rightarrow k(x) = x^2. \end{aligned}$$

On a donc $y_0 = x^2(e^x + 1)$.

La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $y = k(e^x + 1) + x^2(e^x + 1) = (x^2 + k)(e^x + 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

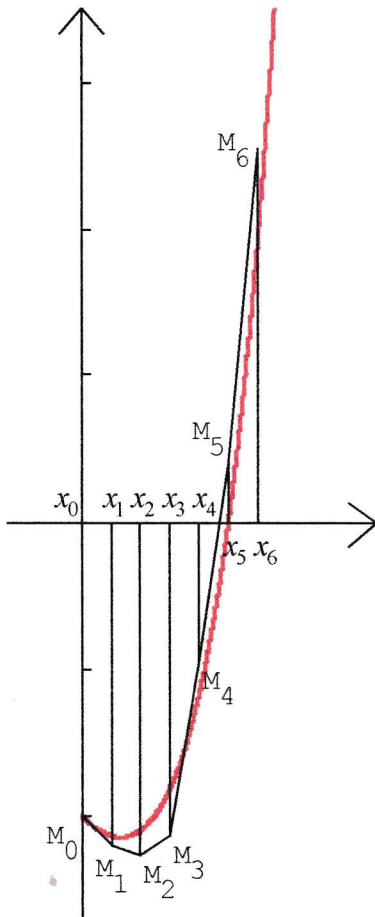
la condition initiale permet de calculer la constante k .

$$y(0) = -2 \Rightarrow 2k = -2 \Rightarrow k = -1.$$

On a donc $f(x) = (x^2 - 1)(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Approximation de la solution f par la méthode de Newton :

On prend $h = 0,2$ et $n = 6$, l'approximation s'effectue sur l'intervalle $[0, 12/10]$.



II) Equations différentielles linéaires du second ordre à coeff. constants

1) Généralités

d_1 : On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation différentielle (L) de la forme $ay'' + by' + cy = g(x)$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ et $g: I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Notations

On note (L) : $ay'' + by' + cy = g(x)$ et $S(L)$ les solutions de (L) sur I .

On note (H) : $ay'' + by' + cy = 0$ et $S(H)$ les solutions de (H) sur I .

p_1 : i) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, soit $(f,g) \in S(H)^2$ alors $\lambda f + \mu g \in S(H)$.

ii) Soit y_0 une solution particulière de (L) , alors $S(L) = y_0 + S(H)$.

Preuve

Déjà faite dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

2) Résolution de l'équation homogène (H)

(H) : $ay'' + by' + cy = 0$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.

On recherche des solutions de (H) sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$.

y vérifie $(H) \Leftrightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$.

$ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de (H) , $\Delta = b^2 - 4ac$.

• $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 .

$y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ sont solutions de (H) .

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ est aussi solution de (H) .

• $\Delta = 0$: une racine double r_0 .

$y_1 = e^{r_0 x}$ est solution de (H) .

On pose $y_2 = x e^{r_0 x}$.

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = a(2r_0 e^{r_0 x} + r_0^2 x e^{r_0 x}) + b(e^{r_0 x} + r_0 x e^{r_0 x}) + c x e^{r_0 x} = e^{r_0 x} [x(\underbrace{ar_0^2 + br_0 + c}_{=0}) + \underbrace{2ar_0 + b}_{=0 \text{ car } r_0 = -\frac{b}{2a}}] = 0.$$

La fonction y_2 est donc solution de (H) .

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda e^{r_0 x} + \mu x e^{r_0 x} = (\lambda + \mu x) e^{r_0 x}$ est aussi solution de (H) .

• $\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r}$.

$x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto e^{\bar{r}x}$ sont solutions de (H) .

$\forall (\gamma, \tilde{\gamma}) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto \gamma e^{rx} + \tilde{\gamma} e^{\bar{r}x}$ est aussi solution de (H) .

Pour obtenir des solutions à valeurs réelles, on prend $\gamma = u + iv$ et $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma} = u - iv$.

$$\gamma e^{rx} + \bar{\gamma} e^{\bar{r}x} = 2\operatorname{Re}(\gamma e^{rx}) = 2\operatorname{Re}[(u + iv)e^{(\alpha + i\beta)x}] = 2\operatorname{Re}[(u + iv)e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)] = 2ue^{\alpha x} \cos \beta x - 2ve^{\alpha x} \sin \beta x.$$

On pose $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de (H) .

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda e^{\alpha x} \cos \beta x + \mu e^{\alpha x} \sin \beta x$ est aussi solution de (H) .

Th_1 : Soit (H) : $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

Equation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 :

$$y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $\Delta = 0$, une racine double r_0 :

$$y = (\lambda + \mu x) e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r}$:

$$y = \lambda e^{\alpha x} \cos \beta x + \mu e^{\alpha x} \sin \beta x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration

Une partie faite au dessus.

3) Résolution de l'équation différentielle (L)

(L) : $ay'' + by' + cy = g(x)$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ et $g: I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

$S(L) = y_0 + S(H)$.

Recherche d'une solution particulière y_0 .

On recherche une solution particulière ayant la même forme que la fonction g .

$$g(x) = P_1(x) \rightarrow y_0 = P_2(x),$$

$$g(x) = P_1(x)e^{\alpha x} \rightarrow y_0 = P_2(x)e^{\alpha x},$$

$$g(x) = \cos(ax)e^{\alpha x} \text{ ou } \sin(ax)e^{\alpha x} \rightarrow y_0 = [A\cos(ax) + B\sin(ax)]e^{\alpha x}.$$

Exemple

Soit l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 1 + \cos x + e^x$.

On est en présence d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

- Résolution de l'équation homogène :

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$.

Une racine double $r_0 = 1$, $y = (\lambda + \mu x)e^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- Recherche d'une solution particulière :

Soit y_1 une solution particulière de $y'' - 2y' + y = 1$.

Soit y_2 une solution particulière de $y'' - 2y' + y = \cos x$.

Soit y_3 une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^x$.

$y_1 + y_2 + y_3$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + y = 1 + \cos x + e^x$, en effet :

$$(y_1 + y_2 + y_3)'' - 2(y_1 + y_2 + y_3)' + (y_1 + y_2 + y_3) = y_1'' - 2y_1' + y_1 + y_2'' - 2y_2' + y_2 + y_3'' - 2y_3' + y_3 \\ = 1 + \cos x + e^x = 0.$$

$$y_1 = 1.$$

On recherche y_2 sous la forme $a\cos x + b\sin x$, $y_2 = -\frac{1}{2}\sin x$.

On recherche y_3 sous la forme ax^2e^x , $y_3 = \frac{1}{2}x^2e^x$.

- La solution générale de l'équation différentielle est $y = (\lambda + \mu x)e^x + 1 - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x^2e^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.