

CONCOURS D'ADMISSION À L'ESM SAINT-CYR

ÉPREUVE DE SÉLECTION

EN 2024

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

COEFF. : 1

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 : Calculs et résolutions d'équations

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire et le module du nombre complexe $\frac{1+i}{1-i}$.

2. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

4. Calculer et simplifier $\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k(k+1)}$ en remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

5. Résoudre le système d'équations d'inconnues réelles x, y et z suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(x^2 - 3x + 2) = \ln(2x - 1).$$

Exercice 2 : Probabilités

Les 5 questions suivantes sont indépendantes et les réponses sont à choix multiple. Pour chacune d'entre elle, déterminer la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . Quelle est la probabilité $P(X > n)$?
 - (a) $(1 - p)^n$
 - (b) $1 - (1 - p)^n$
 - (c) p^n
 - (d) $1 - p^n$
2. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité $P(X \geq Y)$?
 - (a) $\frac{1}{2}$
 - (b) $\frac{1}{n+1}$
 - (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$
 - (d) $1 - \frac{1}{2n}$
3. Considérons un ensemble de 10 questions, chacune ayant 4 choix de réponse, dont un seul est correct. Si un étudiant répond au hasard, quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à exactement 3 questions ?
 - (a) $\binom{10}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7$
 - (b) $10 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7$
 - (c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$
 - (d) $\binom{10}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3$
4. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la somme de 2 dés à 6 faces équilibrés. Quelle est la loi de X ?
 - (a) X suit la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.
 - (b) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{1}{6}$.
 - (c) X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, 12\}$.
 - (d) Une autre réponse que les précédentes.
5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et de loi donnée par

$$P(X = 0) = P(X = 2) = a \quad \text{et} \quad P(X = 1) = 1 - 2a$$

où a est une constante réelle. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour a ?

- (a) Toutes les valeurs de $]0, 1[$ car $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$.
- (b) Seulement la valeur $a = 1/4$.
- (c) Toutes les valeurs de $]0, 1/2[$.
- (d) Une autre réponse que les précédentes.

Exercice 3 : Etude de fonction

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $]0; 1[$ par :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall t \in]0; 1[, \quad t \ln(t) < 0.$$

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$.

3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
(b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère orthonormé ?

PARTIE B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$. En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ que l'on note u_n .
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0; 1[$.
3. Déterminer u_1 et u_2 .
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$.
5. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
6. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 : Algèbre linéaire

Soit l'application $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le noyau de f .
4. Déterminer l'image de f .
5. Déterminer le rang de f .

Exercice 5 : Calcul matriciel

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que la matrice $A^2 - 5A + 4I_2$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $X^2 - 5X + 4$.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fin du sujet