

LYCEE MILITAIRE D'AUTUN

MPSI , ANNEE SCOLAIRE 2003-2004

CHAPITRE 3 : **FONCTIONS USUELLES**

PLAN DU COURS

I) Fonctions logarithmes , exponentielles et puissances

- 1) Rappels
- 2) Fonctions logarithmes
- 3) Fonctions exponentielles
- 4) Fonctions puissances

II) Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

- 1) Fonctions hyperboliques
- 2) Fonctions hyperboliques réciproques

III) Fonctions circulaires et circulaires réciproques

- 1) Fonctions circulaires
- 2) Fonctions circulaires réciproques

Fiche d'exercices sur les **Fonctions usuelles**

CHAPITRE 3

PREMIERE PERIODE

FONCTIONS USUELLES

1) Fonctions logarithmes , exponentielles et puissances

1) Rappels

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ou I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Dans une expression $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, x se rapproche de x_0 mais ne prend jamais la valeur de x_0 .

La fonction f est continue en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

La fonction f est dérivable en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Si la fonction f est dérivable en x_0 , on note $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

L'équation de la tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Remarque

Si la fonction f est dérivable en x_0 , la relation $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ permet de calculer certaines limites.

Exemples

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = (\ln x)'(1) = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'(0) = 1.$$

Plan d'étude d'une fonction

Rechercher le domaine d'étude qui tient compte du domaine de définition, de la parité, de la périodicité et l'écrire comme réunion d'intervalles.

Faire l'étude aux bornes du domaine d'étude.

Par exemple, si $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$, il faut évaluer $f(0)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Calculer la dérivée et obtenir le signe de la dérivée.

Tableau de variation et représentation graphique.

2) Fonctions logarithmes

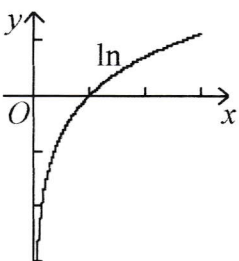
a) Etude de la fonction $x \mapsto \ln x$

$$D =]0, +\infty[.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$: asymptote verticale d'équation $x = 0$ à droite en 0.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: branche parabolique horizontale.

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$



b) Divers

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln x + \ln y \text{ et } \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

$$\ln 2 \approx 0,69.$$

Soit $u: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable sur I , alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Sous les mêmes hypothèses, on a $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + k.$$

3) Fonctions exponentielles

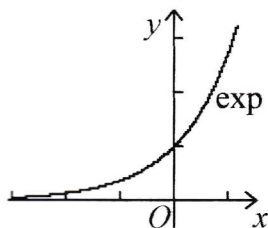
a) Etude de la fonction $x \mapsto e^x$

$$D = \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 : \text{asymptote horizontale d'équation } y = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty : \text{branche parabolique verticale.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x.$$



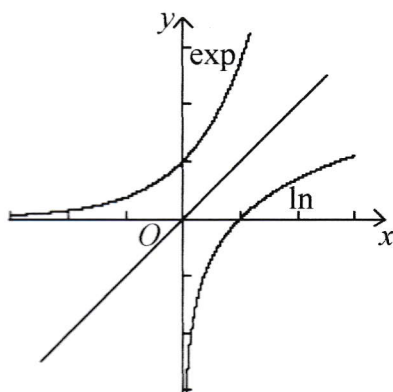
b) Divers

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y \text{ et } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

$$e^1 \approx 2,71.$$

Soit $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$.

Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont des fonctions réciproques : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.



4) Fonctions puissances

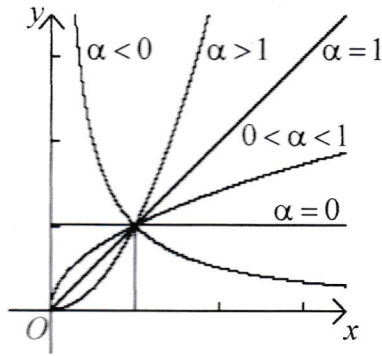
a) Etude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$

Soit $n \in \mathbb{N}$, x^n est défini pour tout x réel (x^2, x^3).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ est défini pour tout x réel positif si n est pair ($\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$),
est défini pour tout x réel si n est impair ($\sqrt[3]{x}$).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est défini pour tout x réel strictement positif.

$\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt{3} \approx 1,73$ et $\sqrt{5} \approx 2,23$.



Rappel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

p_1 : Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.

Preuve

- On a une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha} \ln(x^{\alpha/\beta})\right)^\beta}{(x^{\alpha/\beta})^\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{\ln(x^{\alpha/\beta})}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

- On a une forme indéterminée $0 \times (+\infty)$.

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = (x^{\alpha/\beta})^\beta \left(\frac{\beta}{\alpha} |\ln x^{\alpha/\beta}| \right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta (x^{\alpha/\beta} |\ln x^{\alpha/\beta}|)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

On aurait aussi pu démontrer ce résultat en effectuant le changement de variable en $\frac{1}{x}$ dans la première relation.

b) Etude de la fonction $x \mapsto a^x$

Pour que a^x soit défini, il faut que $a > 0$ et dans ce cas, a^x est défini pour tout x réel.

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a^0 = 1, a^{x+y} = a^x a^y, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, (a^x)^y = a^{xy}, (ab)^x = a^x b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

p_2 : Soit $(\alpha, a) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = +\infty$ si $0 < a < 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$ si $a > 1$.

Preuve

- On suppose que $0 < a < 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = +\infty : \text{forme déterminée } \frac{+\infty}{0^+} = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$$

- On suppose que $a > 1$.

On a une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{e^{\alpha \ln x}}{e^{x \ln a}} = e^{\alpha \ln x - x \ln a} = e^{-x \left(\ln a - \frac{\alpha \ln x}{x} \right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + \ln x}{x^2 + e^x}$: forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\frac{2^x + \ln x}{x^2 + e^x} = \frac{2^x \left(1 + \frac{\ln x}{2^x}\right)}{e^x \left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right)} = \left(\frac{2}{e}\right)^x \frac{\left(1 + \frac{\ln x}{2^x}\right)}{\left(\frac{x^2}{e^x} + 1\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

II) Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

1) Fonctions hyperboliques

a) Définition des fonctions hyperboliques

d_1 : Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: sinus hyperbolique de x ,

$\text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: cosinus hyperbolique de x ,

$\text{th} x = \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x}$: tangente hyperbolique de x .

Th_1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Démonstration

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1.$$

b) Etude de la fonction sh

$\text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, la fonction sh est définie sur $\mathbb{R}$.

$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\text{sh} x$ donc la fonction sh est impaire.

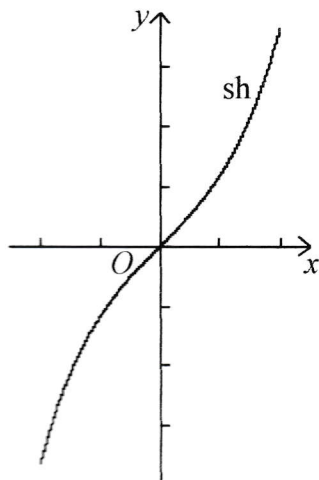
Etude sur $[0, +\infty[$ puis symétrie de centre O .

$\text{sh}(0) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = +\infty$: branche parabolique verticale.

$\forall x \in \mathbb{R}, (\text{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch} x$.

x	0	$+\infty$
sh'		+
sh	0	$+\infty$



c) Etude de la fonction ch

$\text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, la fonction ch est définie sur $\mathbb{R}$.

$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch} x$ donc la fonction ch est paire.

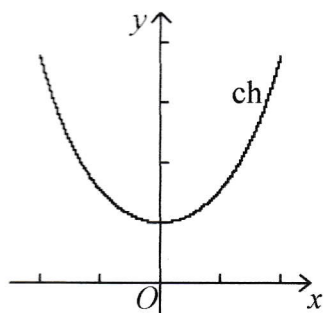
Etude sur $[0, +\infty[$ puis symétrie d'axe (Oy) .

$$\text{ch}(0) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = +\infty : \text{branche parabolique verticale}.$$

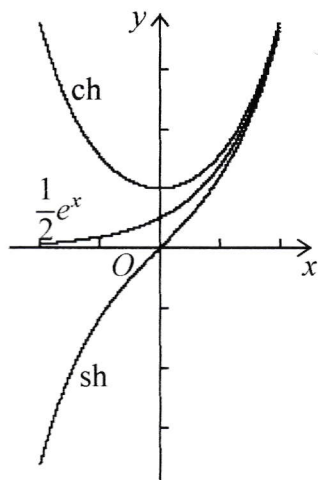
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\text{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh} x.$$

x	0	$+\infty$
ch'	+	
ch	1	$+\infty$



Remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x}{2} < \text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



2) Fonctions hyperboliques réciproques

Remarque

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone continue sur l'intervalle I , alors :

la fonction f est bijective de I vers $J = f(I)$, $f^{-1}: J \rightarrow I$,

si de plus la fonction f est dérivable sur I alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et on a la relation :

$$\forall x \in J, (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

Cette relation sera démontrée dans le chapitre sur la dérivation.

a) Fonction réciproque de la fonction sh

p_1 : La fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Preuve

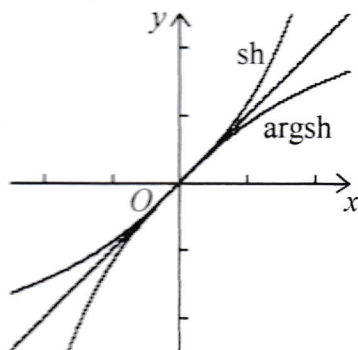
La fonction sh est continue strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc est bijective de $\mathbb{R}$ vers la transformée de $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh} x = +\infty$ donc la transformée de $\mathbb{R}$ par la fonction sh est $\mathbb{R}$.

d₂ : On appelle argsh la fonction réciproque de la fonction sh .

$$\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} .$$

Remarque



La fonction argsh est strictement croissante impaire sur $\mathbb{R}$.

La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Th₂ : $\forall x \in \mathbb{R} , (\text{argsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Démonstration

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{ch}^2 \alpha = \text{sh}^2 \alpha + 1 \Rightarrow |\text{ch } \alpha| = \sqrt{\text{sh}^2 \alpha + 1} \Rightarrow \text{ch } \alpha = \sqrt{\text{sh}^2 \alpha + 1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(\text{argsh } x)' = \frac{1}{\text{sh}'(\text{argsh } x)} = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh } x)} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(\text{argsh } x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Th₃ : $\forall x \in \mathbb{R} , \text{argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Démonstration

$y = \text{sh } x \Leftrightarrow x = \text{argsh } y$, d'autre part ,

$y = \text{sh } x \Rightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$.

On pose $X = e^x$, X vérifie l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$.

$\Delta' = y^2 + 1 > 0$ donc $X = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ or $X = e^x > 0$ donc $X = y + \sqrt{y^2 + 1}$.

$X = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \Rightarrow \text{argsh } y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

On obtient : $\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Applications

• $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\text{argsh } x]_0^1 = \text{argsh}(1) - \text{argsh}(0) = \ln(1 + \sqrt{2})$.

• $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \text{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1$
 $= \text{argsh}(\sqrt{3}) - \text{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \ln 3$.

b) Fonction réciproque de la fonction ch

p₂ : La fonction ch est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

Preuve

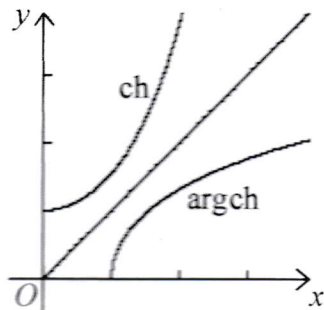
La fonction ch est continue strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ donc est bijective de $[0, +\infty[$ vers la transformée de $[0, +\infty[$.

$\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch } x = +\infty$ donc la transformée de $[0, +\infty[$ par la fonction ch est $[1, +\infty[$.

d₃ : On appelle argch la fonction réciproque de la restriction de la fonction ch à $[0, +\infty[$.

$$\text{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[.$$

Remarque



La fonction $\argch$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

La fonction $\argch$ est continue sur $[1, +\infty[$ et est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$Th_4 : \forall x \in]1, +\infty[, (\argch x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} .$$

Démonstration

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}_+ , \quad \text{ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{ch}^2 \alpha = \text{sh}^2 \alpha + 1 \Rightarrow |\text{sh} \alpha| = \sqrt{\text{ch}^2 \alpha - 1} \Rightarrow \text{sh} \alpha = \sqrt{\text{ch}^2 \alpha - 1} .$$

$$\text{Soit } x \in]1, +\infty[, \quad (\argch x)' = \frac{1}{\text{ch}'(\argch x)} = \frac{1}{\text{sh}(\argch x)} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2(\argch x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} .$$

$$Th_5 : \forall x \in [1, +\infty[, \quad \argch x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) .$$

Démonstration

$$y = \text{ch} x \Leftrightarrow x = \argch y , \text{ d'autre part ,}$$

$$y = \text{ch} x \Rightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 .$$

$$\Delta' = y^2 - 1 > 0 \text{ donc } X = y \pm \sqrt{y^2 - 1} .$$

$$X = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) \Rightarrow \argsh y = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) .$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \argch x = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty ,$$

$$\text{on a donc } \argch x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) .$$

$$\text{On obtient : } \argch : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) .$$

Applications

$$\bullet \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = [\argch x]_2^3 = \argch(3) - \argch(2) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) - \ln(2 + \sqrt{3}) .$$

$$\bullet \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2 - 1}} dx = [\argch(2x+1)]_1^2 \\ = \argch(5) - \argch(3) = \ln(5 + 2\sqrt{6}) - \ln(3 + 2\sqrt{2}) .$$

III) Fonctions circulaires et circulaires réciproques

1) Fonctions circulaires

Voir fiche sur les fonctions trigonométriques .

Exemple

Calcul de $\tan \frac{\pi}{8}$:

$$\tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{8} + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Rightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2} .$$

2) Fonctions circulaires réciproques

a) Fonction réciproque de la fonction sin

p_1 : La fonction sin est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$.

Preuve

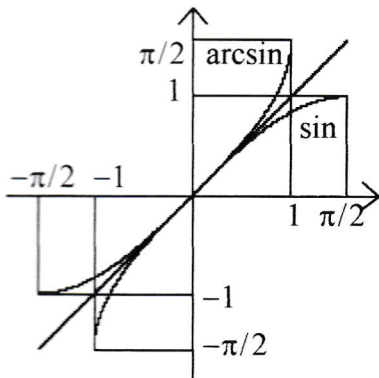
La fonction sin est continue strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers la transformée de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc la transformée de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par la fonction sin est $[-1, 1]$.

d_1 : On appelle arcsin la fonction réciproque de la restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Remarque



La fonction arcsin est strictement croissante impaire sur $[-1, 1]$.

$$\arcsin(0) = 0, \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}, \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}, \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}, \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction arcsin est continue sur $[-1, 1]$ et est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\text{Th}_1 : \forall x \in] -1, 1[, (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration

$$\text{Soit } \alpha \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow |\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Soit } x \in] -1, 1[, (\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Application

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^{1/2} = \arcsin(1/2) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

b) Fonction réciproque de la fonction cos

p_2 : La fonction cos est bijective de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$.

Preuve

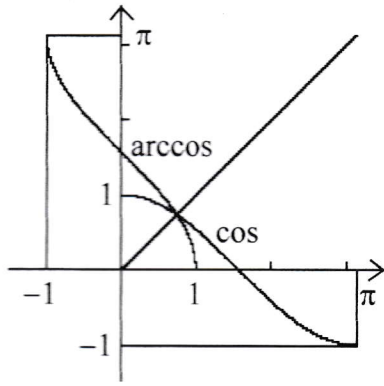
La fonction cos est continue strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$ donc est bijective de $[0, \pi]$ vers la transformée de $[0, \pi]$.

$\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ donc la transformée de $[0, \pi]$ par la fonction cos est $[-1, 1]$.

d_2 : On appelle arccos la fonction réciproque de la restriction de la fonction cos à $[0, \pi]$.

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Remarque



La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

$$\arccos(-1) = \pi, \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \arccos(1) = 0.$$

La fonction arccos est continue sur $[-1, 1]$ et est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\forall x \in] -1, 1[, (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c) Fonction réciproque de la fonction tan

p_3 : La fonction tan est bijective de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

Preuve

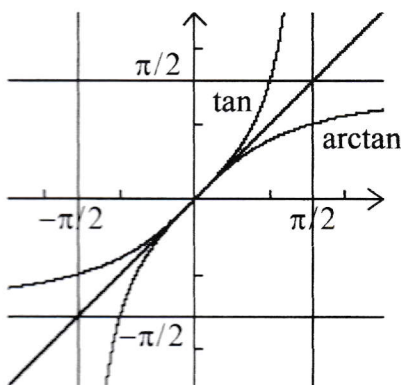
La fonction tan est continue strictement croissante sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc est bijective de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers la transformée de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty \text{ donc la transformée de }] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ par la fonction tan est } \mathbb{R}.$$

d_3 : On appelle arctan la fonction réciproque de la restriction de la fonction tan à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Remarque



La fonction arctan est strictement croissante impaire sur $\mathbb{R}$.

$$\arctan(0) = 0, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\textbf{Th}_2 : \forall x \in \mathbb{R}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, (\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Applications

$$\bullet \int_0^{1/2} \frac{1}{1+4x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan(2x) \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{8}.$$

$$\bullet \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

p_4 : On a la relation : $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Preuve

Soit pour $x > 0$, $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

$$\text{Soit } x > 0 \text{ , } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

$$\forall x > 0 \text{ , } f'(x) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} / f(x) = k.$$

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ donc } k = \frac{\pi}{2}.$$

d) Résumé

	Fonctions bijectives	Fonctions réciproques
Fonctions hyperboliques	$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } (\text{argsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } \text{argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
	$\text{ch} : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$	$\text{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ $\forall x \in]1, +\infty[\text{ , } (\text{argch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\forall x \in [1, +\infty[\text{ , } \text{argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
Fonctions circulaires	$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$	$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\forall x \in]-1, 1[\text{ , } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $\forall x \in]-1, 1[\text{ , } (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$	$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$