

CHAPITRE 1

PREMIERE PERIODE

NOMBRES COMPLEXES

I) Le corps des complexes

1) Généralités

d_1 : On pose $\mathbb{C} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ avec $i^2 = -1$ ($i \notin \mathbb{R}$) .

Remarques

• $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$: $+$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{C}$.

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 + z_2 = z_2 + z_1$: la loi $+$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$: la loi $+$ est associative sur $\mathbb{C}$.

$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$: 0 est l'élément neutre de $\mathbb{C}$ pour la loi $+$.

$\forall z \in \mathbb{C}, z + (-z) = (-z) + z = 0$: $-z$ est le symétrique de z pour la loi $+$.

On dit que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif .

• $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$: $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{C}$.

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$: la loi $\times$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$: la loi $\times$ est associative sur $\mathbb{C}$.

$\forall z \in \mathbb{C}^*, z \times 1 = 1 \times z = z$: 1 est l'élément neutre de $\mathbb{C}$ pour la loi $\times$.

$\forall z \in \mathbb{C}^*, z \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times z = 1$: $\frac{1}{z}$ est le symétrique de z pour la loi $\times$.

On dit que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif .

• $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$ et $(z_1 + z_2) \times z_3 = (z_1 \times z_3) + (z_2 \times z_3)$.

On dit que la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$.

Avec toutes ces relations, on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps .

d_2 : Soit $z \in \mathbb{C}, z = a + ib$, on pose $\text{Re}(z) = a, \text{Im}(z) = b, \bar{z} = a - ib$ et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

p_1 : On a les relations :

$$\text{i) } \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), |z|^2 = z\bar{z},$$

$$\text{ii) } \bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \bar{-z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}, z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0,$$

$$\text{iii) } |\text{Re}(z)| \leq |z|, |\text{Im}(z)| \leq |z|.$$

Preuve

Soit $z \in \mathbb{C}, z = a + ib$.

$$\text{i) } \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}((a + ib) + (a - ib)) = a = \text{Re}(z).$$

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

$$\text{ii) } \bar{\bar{z}} = -z \Leftrightarrow a - ib = -(a + ib) \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} : z \text{ est imaginaire pur}.$$

$$\text{iii) } |\text{Re}(z)| = |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

p_2 : On a les relations :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'} \text{ et } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

Preuve

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2, z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b) = (a - ib)(a' - ib') = \bar{z} \times \bar{z'}.$$

p₃ : On a les relations :

$$|z| = |\bar{z}|, |zz'| = |z||z'| \text{ et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Preuve

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned} |zz'| &= |(a + ib)(a' + ib')| = |aa' - bb' + i(ab' + a'b)| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} \\ &= \sqrt{a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a^2b'^2 + 2aa'bb' + a'^2b^2} = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(a'^2 + b'^2)} = |z||z'|. \end{aligned}$$

p₄ : On a les relations :

- $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$: inégalité triangulaire,
- $\pm(|z| - |z'|) \leq |z \pm z'|$.

Preuve

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

i) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$?

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2. \end{aligned}$$

$$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \Rightarrow |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

En remplaçant z' par $-z'$ dans la dernière inégalité, on obtient : $|z + (-z')| \leq |z| + |-z'| \Rightarrow |z - z'| \leq |z| + |z'|$.

ii) $\pm(|z| - |z'|) \leq |z + z'|$?

$$|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'| \Rightarrow |z| - |z'| \leq |z + z'| \text{ et } |z'| = |z + z' - z| \leq |z + z'| + |z| \Rightarrow |z'| - |z| \leq |z + z'|,$$

on obtient : $\pm(|z| - |z'|) \leq |z + z'|$.

En remplaçant z' par $-z'$ dans la dernière inégalité, on obtient : $\pm(|z| - |z'|) \leq |z - z'|$.

d₃ : On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Remarque

$(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif.

d₄ : On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

p₅ : On a les relations :

- $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'}$,
- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists t \in \mathbb{R} / z = e^{it}$.

Preuve

$$\begin{aligned} \text{i) } e^{it} e^{it'} &= (\cos t + i \sin t)(\cos t' + i \sin t') = \cos t \cos t' - \sin t \sin t' + i(\sin t \cos t' + \cos t \sin t') \\ &= \cos(t + t') + i \sin(t + t') = e^{i(t+t')}. \end{aligned}$$

ii) On écrit le complexe z sous forme algébrique : $z = a + ib$.

$$z \in \mathbb{U} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

Le point $M(a, b)$ appartient au cercle trigonométrique, on peut donc trouver $t \in [0, 2\pi[$ tel que

$M(\cos t, \sin t)$, on en déduit que $a = \cos t$ et $b = \sin t$, c'est-à-dire $z = e^{it}$.

Corollaires

$$\bullet \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, e^{i \sum_{k=1}^n t_k} = \prod_{k=1}^n e^{it_k}.$$

$$\bullet e^{it} = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Th₁ : Formule de Moivre

On a la relation : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$.

Démonstration

Il suffit de faire $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$ dans la première partie du corollaire précédent, on obtient :

$$e^{int} = (e^{it})^n \Rightarrow \cos nt + i \sin nt = (\cos t + i \sin t)^n.$$

d_5 : Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument du complexe z l'ensemble des réels t vérifiant $e^{it} = \frac{z}{|z|}$.

Remarques

• Le nombre complexe 0 possède un module qui est 0 mais ne possède pas d'argument.

• D'après p_5 , t existe bien car $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

• On choisit $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$, $\arg z = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Par abus, on confond θ et $\arg z$ et on note $\arg z = \theta [2\pi]$.

• Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Forme algébrique de z : $z = a + ib$, $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$.

Forme trigonométrique de z : $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$, $\arg z = \theta [2\pi]$.

• Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = re^{i\theta}$, on a $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

• Calcul effectif de l'argument :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + ib = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$ avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On note $\theta = \arg z [2\pi]$, il faut résoudre le système
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$
 où l'inconnue $\theta \in [0, 2\pi[$.

Il vient : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta} \Rightarrow \arg z = \theta [2\pi]$.

p_6 : On a les relations :

- i) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$,
- ii) $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$,
- iii) $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' [2\pi]$,
- iv) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\arg(z^p) = p \arg z [2\pi]$,
- v) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z = 0 [2\pi]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z = \pi [2\pi]$.

Preuve

Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on écrit z et z' sous forme trigonométrique :

$z = re^{i\theta}$, $z' = r'e^{i\theta'}$, $\arg z = \theta [2\pi]$ et $\arg z' = \theta' [2\pi]$:

- i) $\bar{z} = re^{-i\theta} \Rightarrow \arg \bar{z} = -\theta = -\arg z [2\pi]$.
- ii) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \Rightarrow \arg(zz') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z' [2\pi]$.
- iii) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \Rightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z' [2\pi]$.
- iv) $z^p = r^pe^{ip\theta} \Rightarrow \arg(z^p) = p\theta = p \arg z [2\pi]$.
- v) $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z = |z|e^{i0} \Leftrightarrow \arg z = 0 [2\pi]$.
 $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow z = -|z| \Leftrightarrow z = |z|e^{i\pi} \Leftrightarrow \arg z = \pi [2\pi]$.

Exemple

Ecriture trigonométrique des nombres complexes suivants : $z_1 = -3 + 3i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

$|z_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, on note $\theta_1 = \arg z_1 [2\pi]$, il faut résoudre le système
$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$|z_2| = \sqrt{5}$, on note $\theta_2 = \arg z_2 [2\pi]$, il faut résoudre le système
$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \theta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = ? , z_2 = \sqrt{5}e^{i\theta_2}.$$

2) Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

a) Cas général

d_6 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ de z tout nombre complexe Z tel que $Z^n = z$.

Exemples

- Racines carrées de a , $a \in \mathbb{R}^*$:

Si $a > 0$, le nombre réel a possède deux racines carrées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $a < 0$, le nombre réel a possède deux racines carrées $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

- Racines quatrième de 1 : 1, -1, i et $-i$.
- Racines quatrième de 3 : $\sqrt[4]{3}$, $-\sqrt[4]{3}$, $i\sqrt[4]{3}$ et $-i\sqrt[4]{3}$.

Th_2 : Tout nombre complexe z de $\mathbb{C}^*$ admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on écrit le complexe z sous forme trigonométrique, $z = re^{i\theta}$, $r \in]0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et on recherche le complexe Z sous forme trigonométrique, $Z = \rho e^{i\alpha}$, $\rho \in]0, +\infty[$, $\alpha \in [0, 2\pi[$.

$$Z^n = z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta} \Leftrightarrow \rho^n = r \text{ et } n\alpha = \theta [2\pi] .$$

$$\rho^n = r, \rho > 0, r > 0 \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} .$$

$$n\alpha = \theta [2\pi], \alpha \in [0, 2\pi[, \theta \in [0, 2\pi[\Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, 0 \leq k \leq n-1 .$$

L'équation $Z^n = z$ admet exactement n solutions : $Z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1$.

p_7 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de z est nulle.

Preuve

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i \frac{2\pi}{n}} \right)^k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta}{n}} \frac{1 - e^{i \frac{2\pi n}{n}}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{n}}} = 0 .$$

Corollaire

La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle.

b) Cas particuliers

- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité : $\omega_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1$.

On a : $\omega_k = (\omega_1)^k$ et $\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$.

$n=2$, racines carrées de l'unité : 1 et -1.

$n=3$, racines cubiques de l'unité : 1, $e^{i \frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i \frac{4\pi}{3}}$.

On pose $j = e^{i \frac{2\pi}{3}}$, on a les relations $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = \bar{j}$.

$n=4$, racines quatrième de l'unité : 1, i , $-i$ et -1.

- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de z lorsque l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de z est connue.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z s'obtiennent en multipliant une racine $n^{\text{ième}}$ de z par les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

- Racines carrées d'un nombre complexe.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, recherche des deux racines carrées de z :

Recherche trigonométrique :

On écrit z sous forme trigonométrique, $z = re^{i\theta}$.

$Z = \sqrt{r} e^{i \frac{\theta}{2}}$ est une racine carrée de z .

Le complexe z admet deux racines carrées $\pm \sqrt{r} e^{i \frac{\theta}{2}}$.

Recherche algébrique :

On écrit z sous forme algébrique, $z = x + iy$ et on recherche Z sous forme algébrique, $Z = X + iY$.

$$Z^2 = z \Leftrightarrow (X + iY)^2 = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \text{ puis on détermine } X \text{ et } Y .$$

Remarque

Les deux racines carrées d'un nombre complexe sont opposées.

Exemple

Déterminer les deux racines carrées de $z = -3 + 4i$.

Recherche trigonométrique :

$$|z| = 5, \arg z = \arg \left[5 \left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) \right] = \arg \left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) = ?$$

Recherche algébrique :

$$(X + iY)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = -3 \\ XY = 2 \\ X^2 + Y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = 1 \\ Y^2 = 4 \\ XY = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (X, Y) = (1, 2) \text{ ou } (X, Y) = (-1, -2).$$

On obtient $1 + 2i$ et $-(1 + 2i)$.

c) Equation du second degré

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$ et l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, soit δ une racine carrée de Δ , δ vérifie $\Delta = \delta^2$, on obtient :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Remarques

- La somme des racines est égale à $-\frac{b}{a}$, en effet :

$$\frac{-b - \delta}{2a} + \frac{-b + \delta}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Le produit des racines est égal à $\frac{c}{a}$, en effet :

$$\frac{-b - \delta}{2a} \times \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

- Cas particulier : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$, $\delta = \sqrt{\Delta}$, deux racines réelles : $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, une racine double réelle $z = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$, deux racines complexes conjuguées $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

3) Fonction exponentielle

Rappels

- $e^{it} = \cos t + i \sin t \rightarrow$ Formules d'Euler : $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

- $e^{it} e^{it'} = e^{i(t+t')}$, $(e^{it})^n = e^{int}$.

d₇ : Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, on pose $e^z = e^a e^{ib}$, c'est-à-dire $e^z = e^a (\cos b + i \sin b)$.

Remarques

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + ib$, $e^z = e^a e^{ib}$.

On a : $|e^z| = e^a$ et $\arg(e^z) = b [2\pi]$.

- $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Attention, vous n'avez pas le droit de prendre le logarithme d'un nombre complexe.

$z^{z'}$ n'a de sens que si $z' \in \mathbb{Z}$.

p_8 : On a les relations :

- i) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$,
- ii) $\forall z \in \mathbb{C}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$,
- iii) $\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}, e^{inz} = (e^{iz})^n$.

Preuve

i) On écrit z et z' sous forme algébrique : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$e^z e^{z'} = e^{a+ib} e^{a'+ib'} = e^a e^{ib} e^{a'} e^{ib'} = e^a e^{a'} e^{ib} e^{ib'} = e^{a+a'} e^{i(b+b')} = e^{a+a'+i(b+b')} = e^{a+ib+a'+ib'} = e^{z+z'}.$$

Remarque

Les règles de calcul pour l'exponentielle complexe sont les mêmes que pour l'exponentielle réelle.

p_9 : On pose $t = \tan \frac{\theta}{2}$, on a les relations :

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2} \text{ et } e^{i\theta} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2}.$$

Preuve

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cos \theta, \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sin \theta.$$

II) Applications des nombres complexes à la trigonométrie

1) Linéarisation

La linéarisation consiste à transformer un produit de fonctions trigonométriques en une somme.

La principale application de la linéarisation est pour le calcul intégral.

Rappels

- Formules d'Euler : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
- Formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, ...

Exemple

Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \, dx$.

Il faut linéariser l'expression $\cos^4 x \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} \cos^4 x \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{-1}{64} (e^{ix} + e^{-ix})^4 (e^{ix} - e^{-ix})^2 \\ &= \frac{-1}{64} [(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4(e^{ix})(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4] [(e^{ix})^2 - 2(e^{ix})(e^{-ix}) + (e^{-ix})^2] \\ &= \frac{-1}{64} [e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}] [e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}] \\ &= \frac{-1}{64} [(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6] [(e^{2ix} + e^{-2ix}) - 2] \\ &= \frac{-1}{64} (2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)(2\cos 2x - 2) \\ &= \frac{-1}{16} (\cos 4x \cos 2x - \cos 4x + 4\cos^2 2x - 4\cos 2x + 3\cos 2x - 3) \\ &= \frac{-1}{16} \left(\frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) - \cos 4x + 4 \frac{1+\cos 4x}{2} - 4\cos 2x + 3\cos 2x - 3 \right) \\ &= \frac{-1}{32} (\cos 6x + 2\cos 4x - \cos 2x - 2). \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{-1}{32} \left(\int_0^{\pi/2} \cos 6x \, dx + 2 \int_0^{\pi/2} \cos 4x \, dx - \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx - 2 \int_0^{\pi/2} dx \right) = \frac{\pi}{32}.$$

2) Divers

a) Calcul de sommes

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $C_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$.

1^{ier} cas : $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

$C_n = n$ et $S_n = 0$.

2^{ième} cas : $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Soit $Z_n = C_n + iS_n$, on a : $C_n = \operatorname{Re}(Z_n)$ et $S_n = \operatorname{Im}(Z_n)$.

$$\begin{aligned} Z_n &= C_n + iS_n = \sum_{k=1}^n \cos kx + i \sum_{k=1}^n \sin kx = \sum_{k=1}^n (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k \\ &= e^{ix} \frac{1 - (e^{ix})^n}{1 - e^{ix}} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{ix} \frac{e^{\frac{inx}{2}} (e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}} (e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} = \frac{-2i \sin \frac{nx}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} e^{ix + \frac{inx}{2} - \frac{ix}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{i \frac{(n+1)x}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{On obtient : } C_n = \operatorname{Re}(Z_n) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \text{ et } S_n = \operatorname{Im}(Z_n) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

b) Polynômes de Tchebychev

Exemple

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \end{aligned}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$$

On a donc :

$$\cos x = T_1(\cos x) \text{ avec } T_1(x) = x.$$

$$\cos 2x = T_2(\cos x) \text{ avec } T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

$$\cos 3x = T_3(\cos x) \text{ avec } T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

$$\cos 4x = T_4(\cos x) \text{ avec } T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

p_1 : Pour tout $n \geq 1$, il existe un polynôme T_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$.

T_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev.

Preuve

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}[(e^{i\theta})^n] = \operatorname{Re}[(\cos \theta + i \sin \theta)^n] = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} i^k (\sin \theta)^k\right) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (-1)^p (\sin \theta)^{2p} \\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (-1)^p (1 - \cos^2 \theta)^p = \sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (\cos^2 \theta - 1)^p = T_n(\cos \theta). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } T_n(x) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} (x^2 - 1)^k x^{n-2k}.$$

Remarques

On montrera :

- L'unicité de la suite de polynômes $(T_n)_{n \geq 1}$.

- Relation de récurrence vérifiée par la suite de polynômes $(T_n)_{n \geq 1}$: $\forall n \geq 2$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

La suite $(T_n)_{n \geq 1}$ peut être définie par $\begin{cases} T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ \forall n \geq 2, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$.

- $\forall n \geq 1$, $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$, c'est-à-dire T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .

III) Les nombres complexes et la géométrie plane

1) Représentation géométrique des nombres complexes

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine : $\mathcal{P}$ est un ensemble de points .

Soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan : $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \{\overrightarrow{AB}, (A,B) \in \mathcal{P}^2\}$.

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$.

d₁ : i) Affixe d'un point

$\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$
 $M(x,y) \mapsto z = x + iy$ est bijective , on dit que z est l'affixe du point M : $z = \text{aff}(M)$.

ii) Affixe d'un vecteur

$\overrightarrow{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\vec{V}(x,y) \mapsto z = x + iy$ est bijective , on dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{V}$: $z = \text{aff}(\vec{V})$.

Remarques

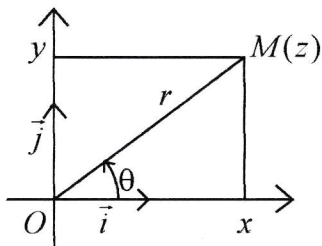
- $\text{aff}(M) = \text{aff}(\overrightarrow{OM})$, $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A)$.
- Soit $(M, M') \in \mathcal{P}^2$, $z = \text{aff}(M)$ et $z' = \text{aff}(M')$.
 M et M' sont symétriques par rapport au point O si et seulement si $z' = -z$.
 M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $(x'x)$ si et seulement si $z' = \bar{z}$.
 M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $(y'y)$ si et seulement si $z' = -\bar{z}$.
- Soit $(\vec{V}, \vec{V}') \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^2$, $z = x + iy = \text{aff}(\vec{V})$ et $z' = x' + iy' = \text{aff}(\vec{V}')$.
 $\bar{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$.
 $\vec{V} \cdot \vec{V}' = xx' + yy' = \text{Re}(\bar{z}z')$.

p₁ : On a les relations :

- Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z = re^{i\theta}$, alors $r = OM$ et $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.
- Soit $\vec{V} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'affixe $z = re^{i\theta}$, alors $r = \|\vec{V}\|$ et $\theta = (\vec{i}, \vec{V}) [2\pi]$.

Preuve

Voir cours de terminale .



Le point M a pour affixe $z = x + iy$.

p₂ : Soit $(A, B, M) \in \mathcal{P}^3$, on note $a = \text{aff}(A)$, $b = \text{aff}(B)$ et $z = \text{aff}(M)$, on a les relations :

- $\frac{AM}{BM} = \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$,
- $(\widehat{AM, BM}) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) [2\pi]$.

Preuve

- $\frac{AM}{BM} = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{BM}\|} = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$.
- $(\widehat{AM, BM}) = (\widehat{AM, i}) + (\widehat{i, BM}) = (\widehat{i, BM}) - (\widehat{i, AM}) = \arg(z-b) - \arg(z-a) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) [2\pi]$.

Corollaire

Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4$,

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 [\pi] \text{ et } (AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] .$$

2) Etude des similitudes directes

a) Rappels

- Représentation complexe d'une translation de vecteur $\vec{V}$, $\vec{V} \in \overline{\mathcal{P}}$.

$$t_{\vec{V}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$t_{\vec{V}}: M \mapsto M' \text{ avec } \overline{MM'} = \vec{V}.$$

On note b l'affixe de $\vec{V}$.

$$\overline{MM'} = \vec{V} \Rightarrow \text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(\vec{V}) \Rightarrow z' - z = b \Rightarrow z' = z + b.$$

- Représentation complexe d'une homothétie de centre Ω de rapport k , $(\Omega, k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}^*$.

$$h_{(\Omega, k)}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$h_{(\Omega, k)}: M \mapsto M' \text{ avec } \overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}.$$

On note ω l'affixe de Ω .

$$\overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M} \Rightarrow \text{aff}(\overline{\Omega M'}) = k \text{aff}(\overline{\Omega M}) \Rightarrow z' - \omega = k(z - \omega).$$

- Représentation complexe d'une rotation de centre Ω et d'angle ayant pour mesure θ , $(\Omega, \theta) \in \mathcal{P} \times [0, 2\pi[$.

$$r_{(\Omega, \theta)}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$r_{(\Omega, \theta)}: M \mapsto M' \text{ avec } \overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M} \text{ et } (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \theta [2\pi].$$

On note ω l'affixe de Ω .

$$\overline{\Omega M'} = \overline{\Omega M} \text{ et } (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \Rightarrow |z' - \omega| = |z - \omega| \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta [2\pi] \Rightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Rightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

b) Généralités

d₂ : On appelle similitude directe toute application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation complexe

$$z' = az + b, (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.$$

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$f: M \mapsto M' \text{ avec } z' = az + b, z = \text{aff}(M) \text{ et } z' = \text{aff}(M').$$

Remarques

- Les translations, les homothéties et les rotations sont des similitudes directes.
- Une similitude indirecte est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation complexe $z' = a\bar{z} + b$.
L'étude des similitudes indirectes n'est pas au programme.

p₃ : La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

Preuve

Soient f et g deux similitudes directes, $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ et $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$
 $f: M \mapsto M'$ avec $z' = az + b$ et $g: M \mapsto M'$ avec $z' = cz + d$.

$$\text{aff}[(g \circ f)(M)] = c(az + b) + d = acz + bc + d.$$

La représentation complexe de $g \circ f$ est de la forme $ez + f$ donc $g \circ f$ est une similitude directe.

p₄ : Soit f une similitude directe de représentation complexe $z' = az + b$.

Si $a \neq 1$ alors f admet un unique point invariant.

Preuve

$$M \text{ est invariant par } f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \text{aff}[f(M)] = \text{aff}(M) \Leftrightarrow z = az + b \Leftrightarrow z = \frac{b}{1-a}.$$

L'application f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.

c) Etude géométrique de f

- Etude pour $|a| = 1$:

On peut écrire $a = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Si $\theta = 0$: $a = 1$, $z' = z + b$ et f est une translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe b .

Si $\theta \neq 0$: $a \neq 1$, $z' = e^{i\theta}z + b$.

L'application f admet un unique point invariant Ω d'affixe ω , $\omega = e^{i\theta}\omega + b$.

$$z' = e^{i\theta}z + b \text{ et } \omega = e^{i\theta}\omega + b \Rightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

L'application f est une rotation de centre Ω d'angle ayant pour mesure $\theta = \arg a [2\pi]$.

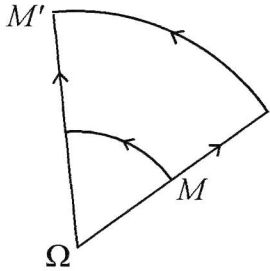
p_5 : Si $|a|=1$ alors f est un déplacement du plan (identité de $\mathcal{P}$, translation ou rotation).

• Etude pour $|a| \neq 1$:

$|a| \neq 1 \Rightarrow a \neq 1$ donc f admet un unique point invariant Ω d'affixe ω : $\omega = a\omega + b$.

$$z' = az + b \text{ et } \omega = a\omega + b \Leftrightarrow z' - \omega = a(z - \omega) \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |a(z - \omega)| \\ \arg(z' - \omega) = \arg(a(z - \omega)) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = |a| \Omega M \\ (\widehat{i, \Omega M'}) = (\widehat{i, \Omega M}) + \arg(a) [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = |a| \Omega M \\ (\widehat{\Omega M, \Omega M'}) = \arg(a) [2\pi] \end{cases}.$$



p_6 : Si $|a| \neq 1$ alors f est la composée commutative d'une homothétie de centre Ω de rapport $|a|$ et d'une rotation de centre Ω d'angle ayant pour mesure $\arg(a)$, Ω est l'unique point invariant de f .

Th_1 : Classification des similitudes directes

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ f: M \mapsto M' \text{ avec } z' = az + b.$$

Si $|a|=1$ alors f est un déplacement du plan.

Si $|a| \neq 1$ alors f est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation, l'homothétie et la rotation ayant le même centre.