

FONCTIONS USUELLES  
exercices

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Dans cet exercice,  $a$ ,  $b$  et  $y$  désignent des réels strictement positifs,  $x$  un réel quelconque et  $n$  un entier naturel.

1.  $a^{y^x} = a^{xy}$ .

☐ Vrai ☐ Faux
2.  $a^{-x+\frac{y}{2}} = \frac{\sqrt{a^y}}{a^x}$ .

☐ Vrai ☐ Faux
3.  $\ln(4) > 2$ .

☐ Vrai ☐ Faux
4.  $\ln\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\ln(a)}$ .

☐ Vrai ☐ Faux
5.  $\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) = \ln(a) - \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .

☐ Vrai ☐ Faux
6.  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ .

☐ Vrai ☐ Faux
7.  $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

☐ Vrai ☐ Faux
8.  $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ .

☐ Vrai ☐ Faux
9.  $\forall t \in ]-1, 1[, \operatorname{Arccos}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ .

☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

Exercice 3 –

1. Prouver que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geq 1$ .
2. Montrer que la fonction  $\operatorname{ch}$  induit une bijection  $g$  de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$  et déterminer sa réciproque, notée  $\operatorname{Arch}$ .

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

1. Prouver que la fonction  $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  et préciser sa valeur sur chacun de ces intervalles.

2. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x$$

Exercice 5 –

1. Prouver que :  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$ .
2. En déduire que :  $\forall x \in [0, \pi], \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$ .

Exercice 6 –

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Déterminer les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .

Exercice 7 –

On considère la fonction  $f : x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
2. Étudier les variations de  $f$ .

Pour aller plus loin

Exercice 8 –

1. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , que vaut  $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$  ?

Exercice 9 –

On définit la fonction  $\operatorname{th}$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$$

2. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , la valeur de :  $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$ .

**Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin**

- |                                                                                            |                               |                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(2x)$ est impaire sur $[-1, 1]$ .           | <input type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux |
| 2. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\sin(x))$ est impaire.                     | <input type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux |
| 3. Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = 0$ . | <input type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux |
| 4. La fonction $x \mapsto -x \ln(x) + e^x$ admet un maximum et un minimum sur $]0, \pi]$ . | <input type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux |
| 5. $\operatorname{Arctan}(\tan(2\pi)) = 2\pi$ .                                            | <input type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux |
| 6. $\forall x \in ]-1, 1[, \tan(\operatorname{Arccos}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .      | <input type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux |

## Solution des exercices

**Exercice 1 –**

- |                                                                                                     |                                          |                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. Ne pas confondre $a^{y^x}$ et $(a^y)^x$ .                                                        | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| 2. $a^{-x+\frac{y}{2}} = \frac{\sqrt{a^y}}{a^x}$ .                                                  | <input checked="" type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux            |
| 3. $\ln 4 = 2 \ln(2)$ et $2 = 2 \ln(e)$ donc $\ln(4) < 2$ .                                         | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| 4. Faux car, par exemple si $a = 2$ , $\ln\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ et $\sqrt{\ln(a)} \neq 0$ . | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| 5. $\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) = \ln(a) - \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .                         | <input checked="" type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux            |
| 6. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ .                                                                      | <input checked="" type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux            |
| 7. Faux car, par exemple si $n = 2$ , $\cos\left(2 \frac{\pi}{2}\right) = -1$ .                     | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| 8. $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ .                                              | <input checked="" type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux            |
| 9. $\forall t \in ]-1, 1[, \operatorname{Arccos}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ .                   | <input checked="" type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux            |

**Exercice 2 –**

La fonction  $x \mapsto x^2 + x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et la fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
Dès lors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme différence de fonctions qui le sont. De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) &= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 \\ &= \frac{(2x+1) - 2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} \end{aligned}$$

Attention aux justifications dans le cas d'une composée.  
La fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  n'est pas dérivable en 0.

**Méthode**

Quand on étudie le signe d'une expression de la forme  $a - \sqrt{b}$ , il est souvent intéressant de multiplier et diviser par l'expression conjuguée  $a + \sqrt{b}$  pour simplifier en utilisant l'identité remarquable  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) &= \frac{(2x+1)^2 - 4(x^2+x)}{2\sqrt{x^2+x} [2x+1+2\sqrt{x^2+x}]} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+x} [2x+1+2\sqrt{x^2+x}]} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs  $f$  est continue en 0 comme somme de fonctions qui le sont, donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Cours**

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  est strictement positive (respectivement strictement négative) sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante (respectivement décroissante) sur  $I$ .
- Si  $I = [a, b]$ , si  $f$  est dérivable sur  $]a, b]$  si  $f'$  est strictement positive (respectivement strictement négative) sur  $]a, b]$ , alors  $f$  est strictement croissante (respectivement décroissante) sur  $I$ .

**Exercice 3 –****Cours**

On rappelle que les fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On rappelle également que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

1. On sait que :

On pourrait aussi étudier les variations de la fonction  $\operatorname{ch}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) &= 1 + \operatorname{sh}^2(x) \\ &\geq 1 \end{aligned}$$



## LEBY-KOUADOU

donc, comme la fonction  $\text{ch}$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et comme la fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1$$

2. D'après le résultat précédent, la restriction  $g$  de  $\text{ch}$  à

$\mathbb{R}^+$  est une application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[1, +\infty[$ .

Soit  $y \in [1, +\infty[$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ . On a :

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) = y &\iff e^x + e^{-x} = 2y \\ &\iff e^x - 2y + e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

et comme  $e^x \neq 0$  :

$$\text{ch}(x) = y \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

De plus l'équation  $X^2 - 2yX + 1 = 0$  admet pour discriminant  $\Delta = 4(y^2 - 1)$  qui est positif ou nul donc :

- Si  $y = 1$ ,  $X_1 = 1$  est l'unique solution de l'équation  $X^2 - 2yX + 1 = 0$ ; ainsi, on a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) = y &\iff e^x = X_1 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

- Si  $y > 1$ , l'équation  $X^2 - 2yX + 1 = 0$  admet deux solutions réelles, qui sont :

$$X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

On peut également remarquer que, dans ce cas, on a :

$$X_2 < 1 < X_1$$

On a donc, dans ce cas, comme  $e^x \geq 1$  (car  $x \geq 0$ ) :

$$\text{ch}(x) = y \iff e^x = X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

donc, comme la fonction  $\exp$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\text{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

On constate que le cas  $y = 1$  rejoint le cas général, ce qui nous permet de conclure, comme  $\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$  appartient bien à  $\mathbb{R}^+$ , que  $\text{ch}$  induit une bijection  $g$  de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$  et que :

$$\forall y \in [1, +\infty[, \text{Argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

### À retenir

Bien retenir la méthode utilisée ici, très classique. On montrerait de même que la fonction  $\text{sh}$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^+$  et que sa réciproque est la fonction  $\text{Argsh}$  définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \text{Argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

## LMAUTUN 23-24

### Exercice 4 –

1. La fonction  $\text{Arctan}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et les fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'affirmer,  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  étant des intervalles, que  $f$  est constante sur chacun de ces intervalles. De plus, on a :

$$f(1) = 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

ce qui nous permet de conclure

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

2. • La fonction  $g : x \mapsto \text{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$g$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Comme  $g(0) = 0$ , on en déduit que  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}^+$ , et donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x)$$

- La fonction  $h : x \mapsto x - \text{Arctan}(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, h'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$h$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Comme  $h(0) = 0$ , on en déduit que  $h$  est positive sur  $\mathbb{R}^+$ , et donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \text{Arctan}(x) \leq x$$

Pour montrer qu'une fonction dérivable est constante sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , il suffit de prouver que sa dérivée est nulle.

$$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

⚙️ Méthode

On pouvait aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis sur  $[0, x]$  en remarquant que :

$$\forall t \in [0, x], \frac{1}{1+t^2} \leq \text{Arctan}'(t) \leq 1$$

Exercice 5 –

1. La fonction  $f : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^2}{\pi}$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}$$

La fonction  $f'$  est elle-même dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  comme somme de fonctions qui le sont et on a :

Comme le signe de  $f'$  n'est pas évident, on peut étudier ses variations pour le trouver.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f''(x) = -\sin(x) + \frac{2}{\pi}$$

La fonction  $f''$  est donc strictement décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (car  $\sin$  est strictement croissante sur cet intervalle, mais on pouvait aussi calculer  $f^{(3)}$  et remarquer qu'elle est strictement négative sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ). Comme  $f''$  est également continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , elle réalise donc une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right]$ . De plus, on a, comme  $\frac{2}{\pi} < 1$  :

$$f''(0) > 0 \quad \text{et} \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Il en découle que  $f''$  s'annule en un unique élément  $c$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  puis on en déduit le tableau de variations et de signes suivant :

|          |   |     |                 |
|----------|---|-----|-----------------|
| $x$      | 0 | $c$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f''(x)$ |   | +   | −               |
| $f'$     | 0 |     | 0               |
| $f'(x)$  |   | +   |                 |

Finalement,  $f$  est croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Comme  $f(0) = 0$ ,  $f$  est donc positive sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$$

2. On a :

On pense à utiliser une formule de trigonométrie

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \sin(x) = \sin(\pi - x)$$

donc, d'après le résultat précédent, comme  $\pi - x$  appartient à  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  lorsque  $x$  appartient à  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \sin(x) &\geq (\pi - x) - \frac{(\pi - x)^2}{\pi} \\ &\geq \pi - x - \frac{\pi^2 - 2\pi x + x^2}{\pi} \\ &\geq x - \frac{x^2}{\pi} \end{aligned}$$

Finalement, on a donc bien :

$$\forall x \in [0, \pi], \sin(x) \geq x - \frac{x^2}{\pi}$$

⚙️ Méthode

Penser que, lorsqu'un résultat faisant intervenir les fonctions trigonométriques a été établi sur une partie de  $\mathbb{R}$ , il est souvent possible d'obtenir de nouveaux résultats sur d'autres parties de  $\mathbb{R}$  à l'aide des formules de trigonométries.

🎓 Cours

Se souvenir que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \end{cases}$$

Exercice 6 –

⚙️ Méthode

Quand on étudie une fonction de la forme  $x \mapsto [g(x)]^x$  (calculs de limites, variations, ...), il est le plus souvent recommandé d'utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et  $\ln$  en remarquant que, si  $g$  est une fonction strictement positive :  $[g(x)]^x = \exp(x \ln(g(x)))$ .

- La fonction  $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$



De plus, on sait que :

On utilise la définition du nombre dérivé.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t) - \ln(1)}{t - 1} = 1$$

donc, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

donc, comme la fonction exponentielle est continue en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$$

• On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln(x+1) - x \ln(x)$$

De plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0$$

et, par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

donc, comme la fonction exponentielle est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

### Cours – Croissances comparées.

Se souvenir que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) &= 0 \end{aligned}$$

### Exercice 7 –

1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{2x+1}{2} e^{-x^2} = \frac{2x+1}{2x^2} \times x^2 e^{-x^2}$$

#### Méthode

Quand on souhaite calculer la limite d'une fonction en un point et qu'il y a une indétermination faisant intervenir des fonctions usuelles, il est fréquent que l'on utilise les croissances comparées.

Attention cependant à la précipitation et à ne pas invoquer les croissances comparées à tort et à travers.

De plus on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0$$

donc, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$$

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{2x^2} = 0$$

On en déduit alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

2. La fonction  $x \mapsto -x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Il en découle que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions qui le sont. De plus on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= e^{-x^2} - 2x \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} \\ &= (1 - x - 2x^2) e^{-x^2} \end{aligned}$$

De plus la fonction polynôme  $x \mapsto 1 - x - 2x^2$  admet pour racines  $-1$  et  $\frac{1}{2}$  donc, comme son coefficient dominant est égal à  $-2$ , elle est positive sur  $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$  et négative en dehors.

On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$            | $\frac{1}{2}$      | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------|--------------------|-----------|
| $f'(x)$ | $-$       | $0$             | $+$                | $0$       |
| $f$     | $0$       | $-\frac{1}{2e}$ | $e^{-\frac{1}{4}}$ | $0$       |

On peut calculer le discriminant, mais aussi remarquer que  $-1$  est racine évidente puis que le produit des racines est égal à  $-\frac{1}{2}$ .

 Cours

Se souvenir que, si  $\lambda$  et  $\mu$  sont les racines du polynôme  $aX^2 + bX + c$  (où  $a \neq 0$ ), alors :

$$\lambda + \mu = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \lambda\mu = \frac{c}{a}$$

## Exercice 8 –

 Cours

Se souvenir que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$ .

On rappelle également que, pour tout  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$  (vérification immédiate en remplaçant  $\tan(x)$  par  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ).

1. Comme Arctan prend ses valeurs dans  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  et comme cos est strictement positive sur cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan}(x)) &= \sqrt{\cos^2(\text{Arctan}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))}} \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

2. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(\text{Arctan}(x)) &= 1 - \cos^2(\text{Arctan}(x)) \\ &= 1 - \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Par ailleurs on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 \leq \text{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}(x) \leq 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \sin(t) \geq 0 & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin(t) \leq 0 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < t \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(\text{Arctan}(x))$  est du signe de  $x$ , donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

## Exercice 9 –

1. Notons déjà que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \neq 0$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)} &= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{th}(x) = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \text{th}(2^k x) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left[ \frac{2}{\text{th}(2^{k+1} x)} - \frac{1}{\text{th}(2^k x)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1} x)} - \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} \right] \end{aligned}$$

et donc, en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \text{th}(2^k x) = \frac{2^n}{\text{th}(2^n x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$$

## Exercice 10 –

1. Faux. La fonction Arcsin n'étant définie que sur  $[-1, 1]$ , la fonction  $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$  n'est définie que sur  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , donc ne peut être impaire sur  $[-1, 1]$  !

En revanche la fonction  $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$  est impaire sur  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

2. Faux. Il suffit de remarquer que :

$$\text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{Arccos}(1) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{Arccos}(-1) = \pi$$



3. Faux. D'une part on ne peut utiliser ici les croissances comparées car il faudrait  $\frac{\ln(x)}{x}$  ou  $\frac{\ln(e^x + 1)}{e^x + 1}$ ; d'autre part on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\ln(e^x + 1)}{x} &= \frac{\ln(e^x (1 + e^{-x}))}{x} \\ &= \frac{\ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x})}{x} \\ &= 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1} \ln(t) = 0$$

d'où, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

donc, par produit, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = 0$$

Finalement, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = 1$$

4. Vrai. La fonction  $f : x \mapsto -x \ln(x) + e^x$  est continue sur  $]0, \pi]$  et on a, par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

donc, comme  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

On peut donc prolonger  $f$  en une fonction continue sur  $[0, \pi]$  en posant  $f(0) = 1$  et alors, d'après le théorème des bornes atteintes,  $f$  est majorée sur  $[0, \pi]$ , donc sur  $]0, \pi]$ .

5. Faux. On a :

L'égalité  $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$  n'est vraie que si  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

$$\text{Arctan}(\tan(2\pi)) = \text{Arctan}(0) = 0$$

6. Faux. Comme  $\tan$  est positive sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1[ , \quad \tan(\text{Arccos}(x)) &= \sqrt{1 + \tan^2(\text{Arccos}(x))} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\text{Arccos}(x))} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1[ , \quad \tan(\text{Arccos}(x)) &= \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\end{aligned}$$

et de même, comme  $\tan$  est négative sur  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  :

$$\begin{aligned}\forall x \in ]-\pi, 0] , \quad \tan(\text{Arccos}(x)) &= -\sqrt{1 + \tan^2(\text{Arccos}(x))} - 1 \\ &= -\sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|} \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\end{aligned}$$