

NOMBRES COMPLEXES
exercices partie 2

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $z^2 = a$ admet exactement deux solutions complexes.

☐ Vrai☐ Faux
2. $1 + i$ est la racine quatrième d'un nombre réel.

☐ Vrai☐ Faux
3. Les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $3 + i$.

☐ Vrai☐ Faux

Exercice 2 –

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $Z_1 = 3 + 4i$.
2. $Z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 3 –

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.
3. $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$.

Exercice 4 –

Déterminer :

1. Les racines troisièmes de $1 + i$.
2. Les racines quatrièmes de $-1 + i\sqrt{3}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Résoudre l'équation $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 6 –

Résoudre l'équation $z^3 + z^2 - z + 2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7 –

Résoudre l'équation $(z + 1)^3 = z^3$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 –

Déterminer, sous forme algébrique puis sous forme exponentielle, les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$.
En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Que vaut la somme des racines n -ièmes de l'unité ? Et le produit ?

Exercice 10 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Résoudre l'équation $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 11 –

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Parmi les racines $2n$ -ièmes de l'unité, combien sont racines n -ièmes de -1 ?
2. Soit ω une racine n -ième de l'unité. On suppose que pour tout $1 \leq k \leq n - 1$, $\omega^k \neq 1$ (on dit que ω est une *racine primitive* de l'unité). Montrer que ω admet deux racines carrées distinctes et que l'une des deux est racine n -ième de -1 .

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

1. $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, n > m \Rightarrow \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \{1\}$.

☐ Vrai☐ Faux
2. Les solutions de $z^2 - z + 1 = 0$ sont $-j$ et $-\bar{j}$.

☐ Vrai☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Vrai uniquement si $a \neq 0$.

☐ Vrai☒ Faux
2. $(1 + i)^4 = -4$.

☒ Vrai☐ Faux
3. $(3 + i)^2 = 8 + 6i$.

☐ Vrai☒ Faux

Exercice 2 –

🔧 Méthode

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour déterminer les racines carrées de $x + iy$, on peut chercher les réels a et b tels que $(a + ib)^2 = x + iy$. Par identification des parties réelles et imaginaires, cela est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = x \text{ et } 2ab = y$$

De plus, l'égalité $(a + ib)^2 = x + iy$ permet d'obtenir le fait que $a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (en utilisant le module). On obtient alors facilement les réels a et b possibles sachant que l'égalité $2ab = y$ est utile uniquement pour savoir si a et b sont de même signe ou non.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(a + ib)^2 = Z_1 \iff a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i$$

ce qui par identification est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = 3 \text{ et } 2ab = 4$$

Or si $(a + ib)^2 = Z_1$ alors ces deux nombres complexes ont le même module donc :

$$a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

On en déduit que :

$$(a + ib)^2 = Z_1 \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir :

$$(a + ib)^2 = Z_1 \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ a^2 - b^2 = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Or, d'après la troisième ligne, a et b sont de même signe donc les solutions du système sont $(2, 1)$ et $(-2, -1)$. On en déduit alors que $2 + i$ et $-2 - i$ sont les racines carrées de Z_1 .

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(a + ib)^2 = Z_2 \iff a^2 - b^2 + 2iab = 8 - 6i$$

ce qui par identification est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = 8 \text{ et } 2ab = -6$$

Or si $(a + ib)^2 = Z_2$ alors $a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ (par passage au module). On en déduit que :

$$(a + ib)^2 = Z_2 \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = 8 \\ ab = -3 \end{cases}$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir :

$$(a + ib)^2 = Z_2 \iff \begin{cases} a^2 = 9 \\ a^2 - b^2 = 8 \\ ab = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab = -3 \end{cases}$$

Or, d'après la troisième ligne, a et b sont de signes opposés donc les solutions du système sont $(3, -1)$ et $(-3, 1)$. On en déduit alors que $3 - i$ et $-3 + i$ sont les racines carrées de Z_2 .

Exercice 3 –

📖 Cours

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, notée (E) , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On note Δ le discriminant associé à cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution z_0 définie par $z_0 = -\frac{b}{2a}$. De plus, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

On dit que z_0 est une solution *double*.

- Si $\Delta \neq 0$, il admet donc deux racines carrées $\pm\delta$. L'équation admet alors deux solutions distinctes z_1 et z_2 définies par :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

De plus, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

1. Le discriminant associé vaut $-3 = (\sqrt{3}i)^2$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

ou encore $z_1 = e^{2i\pi/3}$ et $z_2 = e^{-2i\pi/3}$.

On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$

2. Le discriminant associé vaut :

$$\Delta = (-(1 + 2i))^2 - 4(i - 1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

Alors Δ admet pour racines carrées 1 et -1 . Les solutions de cette équation sont donc :

$$z_1 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i \text{ et } z_2 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$$

3. Le discriminant associé vaut :

$$\Delta = (3i - 4)^2 - 4(1 - 7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i$$

On a obtenu dans l'exercice 2 les racines carrées de $\Delta : 2 + i$ et $-2 - i$. On en déduit que les solutions de $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-(3i - 4) - (2 + i)}{2} = 1 - 2i \text{ et } z_1 = \frac{-(3i - 4) + (2 + i)}{2} = 3 - i$$

Exercice 4 –

Cours

Soit $n \geq 1$. Un nombre complexe z est une racine n -ième de l'unité si $z^n = 1$. En notant $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité, on a :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

Cet ensemble contient exactement n éléments. Par cyclicité, on peut aussi écrire :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

1. Le module de $1 + i$ est $\sqrt{2}$. On a :

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z^3 = 1 + i \iff z^3 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \iff z^3 = \left(\sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/12} \right)^3$$

d'après la formule de Moivre. Déterminer les racines troisièmes de $1 + i$ revient donc à résoudre :

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/12}} \right)^3 = 1$$

Or les racines troisièmes de l'unité sont $1, j = e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j}$. Ainsi,

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/12}} \right)^3 = 1 \iff \frac{z}{\sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/12}} \in \{1, j, \bar{j}\}$$

On en déduit que les racines troisièmes de $1 + i$ sont $z_1 = \sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/12}$,

$$z_2 = \sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/12} e^{2i\pi/3} = \sqrt{2}^{1/3} e^{9i\pi/12} = \sqrt{2}^{1/3} e^{3i\pi/4}$$

et

$$z_3 = \sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/12} e^{-2i\pi/3} = \sqrt{2}^{1/3} e^{-7i\pi/12}$$

2. Le module de $-1 + i\sqrt{3}$ est 2. On a :

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 e^{2i\pi/3}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z^4 = -1 + i\sqrt{3} \iff z^4 = 2 e^{2i\pi/3} \iff z^4 = \left(2^{1/4} e^{i\pi/6} \right)^4$$

d'après la formule de Moivre. Déterminer les racines quatrièmes de $-1 + i\sqrt{3}$ revient donc à résoudre :

$$\left(\frac{z}{2^{1/4} e^{i\pi/6}} \right)^4 = 1$$

Or les racines quatrièmes de l'unité sont $1, -1, i$ et $-i$. Ainsi :

$$\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$$

$$\left(\frac{z}{2^{1/4} e^{i\pi/6}} \right)^4 = 1 \iff \frac{z}{\sqrt{2}^{1/3} e^{i\pi/6}} \in \{1, -1, i, -i\}$$

On en déduit que les racines quatrièmes de $-1 + i\sqrt{3}$ sont $z_1 = 2^{1/4} e^{i\pi/6}$, $-z_1$,

$$z_2 = 2^{1/4} i e^{i\pi/6} = 2^{1/4} e^{i\pi/2} e^{i\pi/6} = 2^{1/4} e^{2i\pi/3}$$

et $-z_2$.

Méthode

La méthode associée aux questions précédentes est cruciale. Résoudre une équation du type $z^n = a$ où a est un complexe non nul est toujours possible en se ramenant aux racines n -ièmes de l'unité. Voici les différentes étapes :

1. On détermine la forme trigonométrique de $a : a = r e^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
2. On remarque que $a = (r^{1/n} e^{i\theta/n})^n$ grâce à la formule de Moivre.
3. L'équation se réécrit alors :

$$\left(\frac{z}{r^{1/n} e^{i\theta/n}} \right)^n = 1$$

4. On détermine alors les solutions en utilisant les racines n -ièmes de l'unité.

Exercice 5 –

On remarque que 1 est une solution évidente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^3 - z^2 + z - 1 = z^2(z - 1) + z - 1 = (z^2 + 1)(z - 1) = (z - i)(z + i)(z - 1)$$

L'équation admet donc pour solutions $i, -i$ et 1.

À retenir

Lors de la résolution d'une équation polynomiale de degré supérieur à deux, chercher une solution évidente permet de se ramener à une équation polynomiale d'un degré plus petit.

Exercice 6 –

On remarque que :

$$(-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 2 = -8 + 4 + 2 + 2 = 0$$

Ainsi, -2 est solution de l'équation. Il existe alors trois nombres complexes a , b et c tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + z^2 - z + 2 = (z + 2)(az^2 + bz + c)$$

ou encore en développant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + z^2 - z + 2 = az^3 + (2a + b)z^2 + (c + 2b)z + 2c$$

Par identification, on en déduit que $a = 1$, $c = 1$ et $2a + b = 1$ donc $b = -1$. Ainsi, on souhaite résoudre l'équation :

$$(z + 2)(z^2 - z + 1) = 0$$

Le discriminant du trinôme vaut -3 . Celui-ci admet donc deux racines :

$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -2, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Exercice 7 –

Remarquons que 0 n'est pas solution de l'équation. On résout donc l'équation pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$$(z + 1)^3 = z^3 \iff \left(\frac{z + 1}{z} \right)^3 = 1$$

Or les racines troisièmes de l'unité sont $1, j$ et $\bar{j}$. On en déduit que :

$$(z + 1)^3 = z^3 \iff \frac{z + 1}{z} \in \{1, j, \bar{j}\}$$

On a :

$$\frac{z + 1}{z} = 1 \iff z + 1 = z$$

ce qui est impossible. De plus,

$$\frac{z + 1}{z} = j \iff z + 1 = zj \iff z(j - 1) = 1 \iff z = \frac{1}{j - 1}$$

car $j \neq 1$. De même :

$$\frac{z + 1}{z} = \bar{j} \iff z + 1 = z\bar{j} \iff z(\bar{j} - 1) = 1 \iff z = \frac{1}{\bar{j} - 1}$$

car $\bar{j} \neq 1$. Ainsi, les solutions de l'équation sont $z_1 = \frac{1}{j-1}$ et $z_2 = \frac{1}{\bar{j}-1}$.

Donnons la forme algébrique de z_1 pour conclure. On a :

$$z_1 = \frac{1}{e^{2i\pi/3} - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{2}{-3 + \sqrt{3}i}$$

donc en utilisant le conjugué du dénominateur :

$$z_1 = \frac{2(-3 - \sqrt{3}i)}{12} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}i}{12} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

Exercice 8 –

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(a + ib)^2 = Z \iff a^2 - b^2 + 2iab = \sqrt{3} + i$$

ce qui par identification est équivalent à :

$$a^2 - b^2 = \sqrt{3} \text{ et } 2ab = 1$$

Or si $(a + ib)^2 = Z$ alors ces deux nombres complexes ont le même module donc on en déduit que $a^2 + b^2 = \sqrt{3 + 1} = 2$. Ainsi :

$$(a + ib)^2 = Z \iff \begin{cases} a^2 + b^2 &= 2 \\ a^2 - b^2 &= \sqrt{3} \\ 2ab &= 1 \end{cases}$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir :

$$(a + ib)^2 = Z \iff \begin{cases} a^2 + b^2 &= 2 \\ a^2 - b^2 &= \sqrt{3} \\ 2ab &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 &= \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ b^2 &= \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 2ab &= 1 \end{cases}$$

Or, d'après la troisième ligne, a et b sont de même signe. On en déduit alors que :

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right)$$

sont les racines carrées de Z .

- Remarquons maintenant que :

$$Z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\pi/6}$$

Les racines carrées de Z sont donc $\sqrt{2}e^{i\pi/12}$ et :

$$-\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \sqrt{2}e^{i\pi} e^{i\pi/12} = \sqrt{2}e^{13i\pi/12}$$

- Par unicité, en considérant la seule racine carrée dont la partie réelle est positive, on a :

$$\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right)$$

donc en considérant la partie réelle :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

et ainsi :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

🔧 Méthode

On dispose de deux méthodes pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Z :

- On peut résoudre $(a+ib)^2 = Z$ et obtenir les réels a, b solutions (obtention d'un système de trois équations).
- On peut écrire la forme trigonométrique de $Z : Z = re^{i\theta}$ et les racines carrées sont alors évidentes : $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

Exercice 9 –

Posons $\xi = e^{2i\pi/n}$. Soit S la somme des racines n -ièmes de l'unité. On a :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k$$

Or ξ est différent de 1 (car $n \geq 2$) et $\xi^n = 1$ donc :

$$S = \frac{1-\xi^n}{1-\xi} = 0$$

Notons P le produit des racines n -ièmes de l'unité. On a :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \prod_{k=0}^{n-1} \xi^k$$

donc :

$$P = \xi^{0+1+\dots+(n-1)} = \xi^{n(n-1)/2} = (\xi^n)^{(n-1)/2} = 1$$

car $\xi^n = 1$.

🔑 À retenir

Pour tout nombre complexe q différent de 1, on a :

$$\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 10 –

Remarquons pour commencer que 1 n'est pas solution de l'équation ($2^n \neq 0^n$ car $n \geq 1$). Soit $z \in \mathbb{C}$ différent de 1. On a :

$$\begin{aligned} (z+1)^n &= (z-1)^n \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{z+1}{z-1} = e^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, z+1 = e^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, z(1-e^{2ik\pi/n}) = -(e^{2ik\pi/n}+1) \end{aligned}$$

Si $k = 0$ alors le terme de gauche vaut 0 et celui de droite vaut -2 donc l'égalité n'est pas vraie. De plus, si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $e^{2ik\pi/n} \neq 1$. Ainsi :

D'une manière générale, avant de diviser par une quantité, il faut toujours s'assurer que celle-ci n'est pas nulle

$$\begin{aligned} (z+1)^n &= (z-1)^n \iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z(1-e^{2ik\pi/n}) = -(e^{2ik\pi/n}+1) \\ &\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z = \frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que :

On utilise la méthode de l'angle moitié

$$\begin{aligned} \frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} &= \frac{e^{ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}} \frac{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}} \\ &= \frac{2\cos(k\pi/n)}{2i\sin(k\pi/n)} \\ &= -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}, k \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$$

Exercice 11 –

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^{2n} - 1 = 0 \iff (z^n - 1)(z^n + 1) = 0$$

L'ensemble $\mathbb{U}_{2n}$ des racines $2n$ -ièmes de l'unité est donc la réunion des racines n -ièmes de l'unité et des racines n -ièmes de -1 . Cette union est disjointe car si une racine a est commune alors $a^n = -1$ et $a^n = 1$ ce qui est absurde. Il y a n racines n -ièmes de -1 donc parmi les racines $2n$ -ièmes de l'unité, n sont racines de -1 .

- Le complexe ω est différent de 0 car $\omega^n = 1$ donc ses racines carrées sont non nulles et opposées donc elles sont distinctes.

Soit z et $-z$ les deux racines carrées de ω . Alors :

$$z^{2n} = (z^2)^n = \omega^n = 1$$

car ω est une racine n -ième de l'unité. De même, $(-z)^{2n} = 1$. Ainsi, z et $-z$ sont toutes les deux des racines $2n$ -ièmes de l'unité. D'après le raisonnement de la question précédente, elles sont donc racines n -ièmes de 1 ou de -1 . Supposons par l'absurde qu'elles sont toutes les deux racines n -ième de 1. Alors $z^n = 1$ et $(-z)^n = 1$. Donc :

$$1 = (-z)^n = (-1)^n z^n = (-1)^n$$

et ainsi n est pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$. Alors :

$$\omega^p = (z^2)^p = z^{2p} = z^n = 1$$

et $1 \leq p \leq n-1$ ce qui contredit le fait que ω est une racine primitive. Finalement, l'une des deux est racine n -ième de -1 .

Exercice 12 –

1. Faux. Le réel -1 appartient à la fois à $\mathbb{U}_2$ et $\mathbb{U}_4$.

À retenir

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est pair, $\mathbb{U}_n$ contient 1 et -1 .
- Si n est impair, $\mathbb{U}_n$ contient 1 mais pas -1 .

2. Vrai. On sait que $1 + j + j^2 = 0$ donc $(-j)^2 - (-j) + 1 = 0$ donc $-j$ est bien solution de l'équation proposée. Or celle-ci est à coefficients réels donc par passage au conjugué, $-\bar{j}$ est aussi solution de l'équation (et elle est distincte de la première). L'équation étant de degré 2, nous venons de trouver toutes les solutions.

À retenir

Si un nombre complexe z est solution d'une équation polynomiale à coefficients *réels* alors $\bar{z}$ est aussi solution de cette équation.