

NOMBRES COMPLEXES
exercices

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit z, z' deux nombres complexes ($z' \neq 0$).

1. $|zz'| = |z| |z'|$.

☐ Vrai ☐ Faux
2. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

☐ Vrai ☐ Faux
3. $\Re\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\Re(z)}{\Re(z')}$.

☐ Vrai ☐ Faux
4. $\Re(iz) = \Im m(z)$.

☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Que vaut $z\bar{z}$?

Exercice 3 –

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme algébrique de $e^{ia}e^{ib}$ et de $e^{i(a+b)}$. Que retrouve t-on ainsi?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2 + i)(-3 + 5i)$.
2. $z_2 = -2i(1 + 3i)$.
3. $z_3 = \frac{1-5i}{2-i}$

Exercice 5 –

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $z_1 = 2e^{5i\pi/6}$.
2. $z_2 = -3e^{-i\pi/3}$.
3. $z_3 = e^{i\pi/2} + e^{i\pi}$.

Exercice 6 –

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \sqrt{3} - i$.
2. $z_2 = -3i$.
3. $z_3 = -4 - 4i$.
4. $z_4 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$.

Exercice 7 –

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $z \in \mathbb{C}$:

1. $2i + 3z = i(5 - iz)$.
2. $z^2 = z\bar{z}$.

Exercice 8 –

Soit z un nombre complexe différent de $-i$. Déterminer le module de Z défini par :

$$Z = \frac{\bar{z} - i}{z + i}$$

Exercice 9 –

Linéariser $\cos(x)^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 –

Écrire, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

Exercice 11 –

Déterminer les entiers relatifs n tels que $(1 + i)^n$ soit réel.

Exercice 12 –

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

Pour aller plus loin

Exercice 13 –

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$|1 + z| = 1 + |z|$$

Exercice 14 –

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$ les valeurs de :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx)$$

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $|zz'| = |z| |z'|.$

☒ Vrai☐ Faux
2. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$

☒ Vrai☐ Faux
3. $\Re\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\Re(z)}{\Re(z')}.$

☐ Vrai☒ Faux
4. $\Re(iz) = \Im m(z).$

☐ Vrai☒ Faux

Cours

Un nombre complexe z s’écrit d’une manière unique sous la forme $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle cette écriture la forme algébrique de z . Le réel x (respectivement y) est appelé partie réelle (respectivement imaginaire) de z et est noté $\Re e(z)$ (respectivement $\Im m(z)$).

- $i^2 = -1.$
- Le module de z est le réel positif, noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$
- Le conjugué de z est le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par $\overline{z} = x - iy.$
- On a les relations suivantes :

$$\Re e(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \Im m(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$

Exercice 2 –

On a :

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Exercice 3 –

On a :

$$\begin{aligned} e^{ia}e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)) \end{aligned}$$

et :

$$e^{i(a+b)} = \cos(a + b) + i\sin(a + b)$$

donc par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$$

et :

$$\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

Cours

Pour tout réel x , e^{ix} est le nombre complexe défini de la manière suivante :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

C’est un nombre complexe de module 1.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)} \text{ et } \overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$$

Exercice 4 –

1. On a :

$$z_1 = -6 + 10i - 3i - 5 = -11 + 7i$$

La partie réelle de z_1 est donc -11 et sa partie imaginaire 7 .

2. On a :

$$z_2 = 6 - 2i$$

La partie réelle de z_2 est donc 6 et sa partie imaginaire -2 .

3. On a :

$$z_3 = \frac{(1 - 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{7 - 9i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{9}{5}i$$

La partie réelle de z_3 est donc $\frac{7}{5}$ et sa partie imaginaire $-\frac{9}{5}$.

Méthode

Pour déterminer la forme algébrique d’un quotient de nombres complexes, on peut multiplier par le conjugué du dénominateur puis utiliser la relation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z\overline{z} = |z|^2$$

Exercice 5 –

1. On a :

$$z_1 = 2(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)) = 2(-\sqrt{3}/2 + i/2) = -\sqrt{3} + i$$

2. On a :

$$z_2 = -3(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) = -3(1/2 - i\sqrt{3}/2) = -3/2 + 3i\sqrt{3}/2$$

3. On a :

$$z_3 = -1 + i$$

 Cours

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et où θ est un réel, unique modulo 2π . On appelle cette écriture la forme trigonométrique de z . Le réel θ est appelé argument du nombre complexe z . La forme trigonométrique permet d'obtenir directement la forme algébrique :

$$z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)$$

Exercice 6 –

1. On a :

$$|z_1| = \sqrt{3 + (-1)^2} = 2$$

Soit θ un argument de z_2 . Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{-1}{2}$$

Alors $\theta = -\frac{\pi}{6}$ est un argument de z_1 .

 Méthode

Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer un argument !

2. Le module vaut 3 et un argument est $-\frac{\pi}{2}$ car :

$$-3i = -3e^{i\pi/2} = 3e^{-i\pi/2}$$

3. On a :

$$|z_3| = 4|1 + i| = 4\sqrt{2}$$

Soit θ un argument de z_3 . Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alors $\theta = \frac{5\pi}{4}$ convient.

4. En utilisant les propriétés du module, on a :

$$|z_4| = \frac{|1 + i|^8}{|1 - i|^8} = \frac{(\sqrt{2})^8}{(\sqrt{2})^8} = 1$$

En utilisant les propriétés de l'argument, on a :

$$\arg(z_4) = 8(\arg(1 + i) - \arg(1 - i)) = 8(\pi/4 - (-\pi/4)) = 4\pi$$

Un argument de z_4 est donc 0.

 Méthode

On pouvait aussi remarquer que $(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 - i)^2 = -2i$ puis obtenir :

$$z_4 = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^4 = 1$$

 Méthode

Soit $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on suppose z non nul). On détermine la forme trigonométrique du nombre complexe en suivant la démarche suivante :

- On calcule le module de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Un argument $\theta \in \mathbb{R}$ est donné par les égalités suivantes :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

L'utilisation d'un cercle trigonométrique permet généralement d'aider à déterminer θ .

Exercice 7 –

1. On a :

$$\begin{aligned} 2i + 3z = i(5 - iz) &\iff 3z - z = 5i - 2i \\ &\iff 2z = 3i \\ &\iff z = \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Alors :

$$\begin{aligned} z^2 = z\bar{z} &\iff (x + iy)^2 = x^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - y^2 + i(2xy) = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Par identification, cela est équivalent à :

$$y^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2xy = 0$$

donc équivalent à $y = 0$. Ainsi, les solutions sont exactement les nombres réels.

Exercice 8 –

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Alors :

$$Z = \frac{x - iy - i}{x + iy + i} = \frac{x - i(1 + y)}{x + i(1 + y)}$$

On obtient alors :

$$|Z| = \frac{\sqrt{x^2 + (1 + y)^2}}{\sqrt{x^2 + (1 + y)^2}} = 1$$

Exercice 9 –

Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned}\cos(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \\ &= \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}\end{aligned}$$

📖 Cours – Formules d'Euler.

Pour tout réel x , on a :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ces formules, combinées avec la formule du binôme de Newton, permettent de linéariser des expressions trigonométriques de la forme $\cos(x)^3$, $\sin(x)^4$, $\cos(x)^2 \sin(x)^2$...

Exercice 10 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(3x) = \Re(e^{3ix})$$

et

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i \sin(x))^3$$

On utilise alors la formule du binôme :

$$\begin{aligned}e^{3ix} &= \cos(x)^3 + 3i \cos(x)^2 \sin(x) + 3i^2 \cos(x) \sin(x)^2 + i^3 \sin(x)^3 \\ &= \cos(x)^3 + 3i \cos(x)^2 \sin(x) - 3 \cos(x) \sin(x)^2 - i \sin(x)^3\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x)^3 - 3 \cos(x) \sin(x)^2 \\ &= \cos(x)^3 - 3 \cos(x)(1 - \cos(x)^2) \\ &= 4 \cos(x)^3 - 3 \cos(x)\end{aligned}$$

📖 Cours – Formule de Moivre.

Pour tout réel θ et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

ou encore :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Exercice 11 –

On a :

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n (e^{i\pi/4})^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4} = (\sqrt{2})^n (\cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4))$$

On en déduit que $(1 + i)^n$ est un réel si et seulement si $\sin(n\pi/4) = 0$ ou encore si et seulement si n est un multiple de 4.

✎ À retenir

La forme trigonométrique est plus adaptée au calcul de produit ou de puissance de nombres complexes.

Exercice 12 –

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Posons :

$$Z = \frac{1 + z}{1 - z}$$

Alors :

$$Z \text{ est imaginaire pur} \iff Z + \overline{Z} = 0$$

$$\iff \frac{1 + z}{1 - z} + \frac{\overline{1 + z}}{\overline{1 - z}} = 0$$

$$\iff \frac{1 + z}{1 - z} + \frac{1 + \overline{z}}{1 - \overline{z}} = 0$$

$$\iff \frac{(1 + z)(1 - \overline{z}) + (1 + \overline{z})(1 - z)}{(1 - z)(1 - \overline{z})} = 0$$

$$\iff (1 + z)(1 - \overline{z}) + (1 + \overline{z})(1 - z) = 0$$

$$\iff 2 - 2z\overline{z} = 0$$

$$\iff 1 - |z|^2 = 0$$

$$\iff |z|^2 = 1$$

$$\iff |z| = 1$$

car le module de z est positif.

✎ À retenir

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- z est réel si et seulement si $\Im m(z) = 0$ donc si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\Re e(z) = 0$ donc si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Exercice 13 –

On reconnait le cas d’égalité dans l’inégalité triangulaire. On en déduit que l’égalité est vraie si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda 1$ ou $1 = \lambda z$. C’est équivalent au fait que z appartienne à $\mathbb{R}_+$.

 Cours – Inégalité triangulaire.

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Il y a égalité si et seulement si z et z' sont positivement liés, c’est-à-dire si et seulement si il existe un réel positif λ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.

Exercice 14 –

1. On a :

$$e^{i\alpha} - 1 = e^{i\alpha} - e^{i0} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})$$

On sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Ceci implique que :

$$e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{i\frac{\alpha}{2}} \sin(\alpha/2)$$

 À retenir

L’argument précédent est appelé argument de l’angle moitié (on factorise par $e^{i\alpha/2}$ car $\frac{\alpha}{2}$ est la moitié de α).

2. Les deux sommes sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k$$

On sait que $x \in]0, 2\pi[$ donc e^{ix} est différent de 1. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

D’après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikx} &= \frac{2ie^{i(n+1)x/2} \sin((n+1)x/2)}{2ie^{ix/2} \sin(x/2)} \\ &= \frac{e^{inx/2} \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

Par passage à la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient finalement :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \cos(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

et :

$$\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \sin(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$