

SUJET 1

Exercice 6 - PROBABILITÉS & SUITES

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté PILE et un côté FACE. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé. Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté FACE.

Pour tout entier naturel n , on note :

- A_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté FACE"
- B_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté PILE et l'autre côté FACE"
- C_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté PILE"

De plus on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Donner les probabilités a_0, b_0 et c_0 ; puis calculer a_1, b_1 et c_1 .
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer c_n en fonction de a_n et b_n .
4. En déduire que, pour tout entier naturel n : $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}$.
5. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de b_n en sortie.
6. Déterminer le terme général de (b_n) puis en déduire sa limite. Interpréter le résultat.

★★☆ Exercice 9 : obtention d'un triple 6

On lance trois dés équilibrés jusqu'à ce qu'ils nous donnent simultanément 6.

1. Déterminer la probabilité de A_n : « on s'arrête au n -ème lancer » .
On pourra noter T_i : « on a un triplé de 6 au lancer i » et exprimer A_n en fonction de certains T_i .
2. Déterminer de deux manières la probabilité de B_n : « on s'arrête au plus tard au n -ème lancer » .

Correction sujet 1

★★☆ Exercice 9 : obtention d'un triple 6

On lance trois dés équilibrés jusqu'à ce qu'ils nous donnent simultanément 6.

1. Déterminer la probabilité de A_n : « on s'arrête au n -ème lancer » .
On pourra noter T_i : « on a un triplé de 6 au lancer i » et exprimer A_n en fonction de certains T_i .
2. Déterminer de deux manières la probabilité de B_n : « on s'arrête au plus tard au n -ème lancer » .

1. On a : $A_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{T_k} \cap T_n$ car on ne veut pas de triplé sur les $(n-1)$ -ers lancers et un triplé au n -ème lancer.
Par indépendance des événements, on trouve :

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^n P(\overline{T_k}) P(T_n)$$

Or, il est clair que $P(T_i) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ d'où :

$$P(A_n) = \left(\frac{215}{216}\right)^{n-1} \times \frac{1}{216}$$

2. ★ La première manière de procéder est d'écrire que : $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$
car soit on s'arrête au 1^{er} lancer, soit au 2^e lancer, ..., soit au n -ème lancer.
Par incompatibilité, on obtient :

$$P(B_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{215}{216}\right)^{k-1} \times \frac{1}{216}$$

On reconnaît alors une somme de termes géométriques (de raison $\frac{215}{216} \neq 1$) :

$$P(B_n) = \frac{1}{216} \times \frac{1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n}{1 - \frac{215}{216}} = 1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n$$

★ Une manière plus fine de considérer la question est de remarquer que B_n est le contraire de « le triplé 6 n'est toujours pas sorti au n -ème tirage » .

La probabilité de ce nouvel événement étant $\left(\frac{215}{216}\right)^n$, on retrouve bien la formule précédente.

SUJET 2

Exercice 14 - LOI BINOMIALE NÉGATIVE

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$ et donnant FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose les lancers indépendants et on note :

- pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, P_k l'évènement : "obtenir PILE au k -ième lancer" et $F_k = \overline{P_k}$;

- X_n la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenues avant l'apparition du premier PILE. On convient que X_n prend la valeur n si aucun PILE n'est obtenu au cours des n lancers.

1. Préciser $X_n(\Omega)$.

2. Calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ ainsi que $\mathbb{P}([X_n = n])$.

3. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = k])$.

4. Vérifier que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

5. Considérons la fonction f définie sur $]0; 1[$ par : $\forall x \in]0; 1[, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$

5.a. Soit $x \in]0; 1[$. En exprimant de deux façons différentes $f'(x)$, établir : $\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

5.b. En déduire l'espérance de X_n .

5.c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

☆☆☆ Exercice 1 : application de la formule des probabilités totales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soit $(A_i)_{i=1}^n$ un système complet d'évènements tel que la suite $(P(A_i))_i$ soit arithmétique de premier terme $P(A_1) = \frac{1}{2n}$.

1. Déterminer $P(A_i)$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

2. Soit B un évènement tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P_{A_i}(B) = \frac{i}{2n}$$

Calculer $P(B)$ en fonction de n .

Correction du sujet 2

☆☆☆ Exercice 1 : application de la formule des probabilités totales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soit $(A_i)_{i=1}^n$ un système complet d'évènements tel que la suite $(P(A_i))_i$ soit arithmétique de premier terme $P(A_1) = \frac{1}{2n}$.

1. Déterminer $P(A_i)$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
2. Soit B un évènement tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P_{A_i}(B) = \frac{i}{2n}$$

Calculer $P(B)$ en fonction de n .

1. Notons a la raison de la suite $(P(A_i))_i$.
On a le terme général :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(A_i) = \frac{1}{2n} + a(i - 1)$$

Il nous faut déterminer a ; pour cela, utilisons le fait que $(A_i)_{i=1}^n$ soit un système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1 &\iff \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2n} + a(i - 1) \right) = 1 \\ &\iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} + a \sum_{i=1}^n (i - 1) = 1 \\ &\iff \frac{1}{2} + a \frac{(n - 1)n}{2} = 1 \\ &\iff a = \frac{1}{n(n - 1)} \end{aligned}$$

Dès lors, on a l'expression pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$P(A_i) = \frac{1}{2n} + \frac{i - 1}{n(n - 1)}$$

2. La formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(A_i)_{i=1}^n$ nous donne :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{2n} \left(\frac{1}{2n} + \frac{i-1}{n(n-1)} \right) \\
 &= \frac{1}{(2n)^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{2n^2(n-1)} \sum_{i=1}^n (i^2 - i)
 \end{aligned}$$

En scindant les sommes, on a alors :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n(n-1)} \right) \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{2n^2(n-1)} \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= \frac{(n+1)(n-3)}{8n(n-1)} + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n(n-1)} \\
 &= \frac{7n^2 - 7}{24n(n-1)} \\
 &= \frac{7(n+1)}{24n}
 \end{aligned}$$

SUJET 3

Exercice 15 - LOI D'UN MINIMUM

Dans toute l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On dit qu'une variable aléatoire X , définie sur Ω , suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$

- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω , suivant toutes deux la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. On note $M = \min(X, Y)$.

1.a. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X \geq k)$.

1.b. Justifier que M est une variable aléatoire sur Ω .

1.c. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}(M \geq k)$.

1.d. En déduire la loi de M .

2. Soient maintenant $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω , suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. On note $M = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

2.a. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}(M \geq k)$.

2.b. En déduire la loi de M .

2.c. Notons $A = \bigcup_{i=1}^n \{X_i = 1\}$. Démontrer : $\mathbb{P}(A) \geq 1 - e^{-1}$.

Indication : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq \dots$

☆☆☆ Exercice 6 : problème de chronologie pour un tirage dans une urne

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :

U_1 : 2 boules blanches et 3 boules noires et U_2 : 6 boules blanches et 4 boules noires.

1. On choisit une urne au hasard, et on tire une boule au hasard.

(a) Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

(b) Sachant que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

2. Reprendre les mêmes questions avec trois urnes U_1, U_2, U_3 contenant respectivement :

U_1 : 3 blanches et 5 noires, U_2 : 2 blanches et 1 noire et U_3 : 2 blanches et 3 noires.

Correction sujet 3

★☆☆ Exercice 6 : problème de chronologie pour un tirage dans une urne

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :

U_1 : 2 boules blanches et 3 boules noires et U_2 : 6 boules blanches et 4 boules noires.

1. On choisit une urne au hasard, et on tire une boule au hasard.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
 - (b) Sachant que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?
2. Reprendre les mêmes questions avec trois urnes U_1, U_2, U_3 contenant respectivement :
 U_1 : 3 blanches et 5 noires, U_2 : 2 blanches et 1 noire et U_3 : 2 blanches et 3 noires.

1. (a) Avant de tirer la boule blanche, il peut y avoir 2 issues : choisir l'urne U_1 ou l'urne U_2 .

(U_1, U_2) est un système complet d'événements.

On note B l'événement : « on tire une boule blanche ».

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(U_1)P_{U_1}(B) + P(U_2)P_{U_2}(B)$$

et donc :

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{2}$$

- (b) On aimerait inverser la conditionnelle ; pour cela utilisons la formule de Bayes ($P(B) \neq 0$) :

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1)P_{U_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

2. (a) On note U_i : « on choisit l'urne U_i » ($i \in \{1, 2, 3\}$) et B : « on tire une boule blanche ».

On a par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (U_1, U_2, U_3) :

$$P(B) = P(U_1)P_{U_1}(B) + P(U_2)P_{U_2}(B) + P(U_3)P_{U_3}(B)$$

Donc, on a :

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{173}{360}$$

- (b) Par la formule de Bayes ($P(B) \neq 0$), il nous vient :

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1)P_{U_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{45}{173}$$

SUJET 4

Exercice 8 - AVEC OU SANS REMISE?

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n . Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k balles blanches et $n - k$ balles noires.

1. On choisit au hasard une urne puis on tire simultanément 2 balles dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux balles blanches?
2. Même question si le tirage des balles se fait successivement et avec remise.
3. Quelles sont les limites de ces deux probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols.

Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue de jour en jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante. — Si la place est réservée le jour k , la probabilité pour qu'elle soit réservée le jour $k + 1$ est $9/10$.

— Si la place est libre le jour k , la probabilité pour qu'elle soit réservée le jour $k + 1$ est $4/10$.

Pour tout entier $k \geq 0$, on note $R_k = \llcorner$ la place est réservée le jour $k \lrcorner$.

- 1) Préciser $P(R_0)$.
- 2) À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(R_{k+1})$ en fonction de $P(R_k)$.
- 3) En déduire $P(R_k)$ en fonction de k puis sa limite quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1) La place étant libre le jour d'ouverture de la réservation, on a $P(R_0) = 0$.

2) La formule des probabilités totales pour le système complet $(R_k, \overline{R_k})$ donne :

$$\begin{aligned} P(R_{k+1}) &= P_{R_k}(R_{k+1})P(R_k) + P_{\overline{R_k}}(R_{k+1})P(\overline{R_k}) \\ &= \frac{9}{10}P(R_k) + \frac{4}{10}(1 - P(R_k)) \\ &= \frac{1}{2}P(R_k) + \frac{4}{10}. \end{aligned}$$

3) Posons $U_k = P(R_k)$. La suite $(U_k)_{k \geq 0}$ est arithmético-géométrique et on applique la méthode vue au thème 7.

• On cherche x tel que $x = \frac{1}{2}x + \frac{4}{10}$.

On obtient $x = \frac{8}{10}$. On pose $V_k = U_k - x$,

soit $V_k = U_k - \frac{8}{10}$ ou $U_k = V_k + \frac{8}{10}$.

• On montre que $(V_k)_{k \geq 0}$ est géométrique :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= U_{k+1} - \frac{8}{10} \\ &= \left(\frac{1}{2}U_k + \frac{4}{10} \right) - \frac{8}{10} \\ &= \frac{1}{2}U_k - \frac{4}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(V_k + \frac{8}{10} \right) - \frac{4}{10} \\ &= \frac{1}{2}V_k. \end{aligned}$$

• On déduit que :

$$\begin{aligned} V_k &= V_0 \left(\frac{1}{2} \right)^k \\ &= \left(U_0 - \frac{8}{10} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^k \\ &= -\frac{8}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^k. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } U_k = \frac{8}{10} - \frac{8}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^k.$$

Quand $k \rightarrow +\infty$, $\left(\frac{1}{2} \right)^k \rightarrow 0$ donc

$$U_k \rightarrow \frac{8}{10}.$$

SUJET 5

Exercice 11 - LOI GÉOMÉTRIQUE TRONQUÉE

Soit $p \in]0; 1[$. On lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p jusqu'à obtenir le premier PILE; et dans tous les cas, on s'arrête après le cinquième lancer. Les lancers sont supposés indépendants.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

1. Calcul préliminaire. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; 1[, \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$
2. Donner $X(\Omega)$.
3. Que vaut $\mathbb{P}([X = 1])$?
4. Déterminer la loi de X .
5. Calculer l'espérance de X .

Exercice 2

À l'instant 0, un mobile est à l'origine d'un repère.

À chaque instant, il se déplace de façon aléatoire dans le plan en faisant un pas dans l'une quelconque des 4 directions, à droite, à gauche, en haut ou en bas avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Ses coordonnées à l'instant $n \in \mathbb{N}$ sont des variables aléatoires X_n et Y_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

- 1) Préciser $X_n(\Omega)$ et $Y_n(\Omega)$.
- 2) Calculer $P(X_n = n)$ et $P(Y_n = n)$ en fonction de n .
- 3) Que représente Z_n ?
- 4) Déterminer la loi puis l'espérance de Z_n .
- 5) En déduire que $\forall n \geq 0 : E(X_{n+1}) = E(X_n)$ puis préciser la valeur de $E(X_n)$.

Exercice 2

1) On a :

$$X_n(\Omega) = Y_n(\Omega) = \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}.$$

2) L'événement $(X_n = n)$ se réalise si et seulement si le mobile se déplace à droite aux n premiers instants.

On a alors par indépendance :

$$P(X_n = n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

L'événement $(Y_n = n)$ se réalise si et seulement si le mobile se déplace en haut aux n premiers instants.

On a alors par indépendance :

$$P(Y_n = n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

3) Z_n représente la variation d'abscisse du mobile entre le n -ième instant et le $n+1$ -ième instant.

4) On a $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

$$\begin{aligned} P(Z_n = -1) &= P(\text{gauche au } n+1\text{-ième instant}) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z_n = 0) &= P(\text{haut ou bas au } n+1\text{-ième instant}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z_n = 1) &= P(\text{droite au } n+1\text{-ième instant}) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

D'où le tableau :

z	-1	0	1
$P(Z_n = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{Puis, } E(Z_n) = (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0.$$

5) On a $\forall n \geq 0$:

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= E(X_n + Z_n) \\ &= E(X_n) + E(Z_n) \\ &= E(X_n). \end{aligned}$$

La suite $(E(X_n))_{n \geq 1}$ est donc constante. Donc $\forall n \geq 0 : E(X_n) = E(X_1)$.

Or, X_1 a la même loi que Z_n donc $E(X_1) = 0$.

On a donc $\forall n \geq 0 : E(X_n) = 0$.

SUJET 6

Exercice 18 - DÉPLACEMENT ALÉATOIRE

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k , alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0; 1[$, sur le point d'abscisse 0 sinon. On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n . On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1 .
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $\mathbb{P}(X_n = k) = p\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p$
Déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p .
- 5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
- 5.b. En utilisant la question 3, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.
- 5.c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_n = k) = 1$.

Exercice 2

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges ($n \geq 2$). On tire les boules une à une sans remise jusqu'à l'obtention de la première boule blanche. On appelle X , le rang d'apparition de la première boule blanche et Y , le nombre de boules restant dans l'urne à la fin de l'expérience.

- 1) Préciser $X(\Omega)$, puis montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$: $P(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
- 2) En utilisant la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, montrer que $E(X) = \frac{n+1}{3}$.
- 3) Exprimer Y en fonction de X puis $E(Y)$ en fonction de n .

Exercice 2

1) La blanche peut être tirée au premier tirage, au $n - 1$ ème tirage (si les $n - 2$ premiers tirages sont rouges), ainsi qu'à tous les tirages intermédiaires.
Donc $X(\Omega) = \{1, \dots, n - 1\}$.

Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-2} \cap R_{k-1} \cap B_k) \\
 &= P(R_1)P_{R_1}(R_2) \dots P_{R_1 \cap \dots \cap R_{k-3}}(R_{k-2}) \\
 &\quad P_{R_1 \cap \dots \cap R_{k-2}}(R_{k-1})P_{R_1 \cap \dots \cap R_{k-1}}(B_k) \\
 &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+3} \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} \\
 &= \frac{\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\dots\cancel{(n-k+1)}(n-k)2}{n(n-1)\cancel{(n-2)}\dots\cancel{(n-k+2)}\cancel{(n-k+1)}} \\
 &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.
 \end{aligned}$$

2) On a $E(X)$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k}{n-1} - \frac{2k^2}{n(n-1)} \right) \\
 &= \frac{2}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right) - \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\
 &= \frac{2}{n-1} \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
 &= n - \frac{2n-1}{3} \\
 &= \frac{n+1}{3}.
 \end{aligned}$$

3) Au moment où l'expérience s'arrête, X boules ont été tirées. Il en reste donc $n - X$ dans l'urne.

Donc $Y = n - X$.

On déduit :

$$E(Y) = n - E(X) = n - \frac{n+1}{3} = \frac{2n-1}{3}.$$

